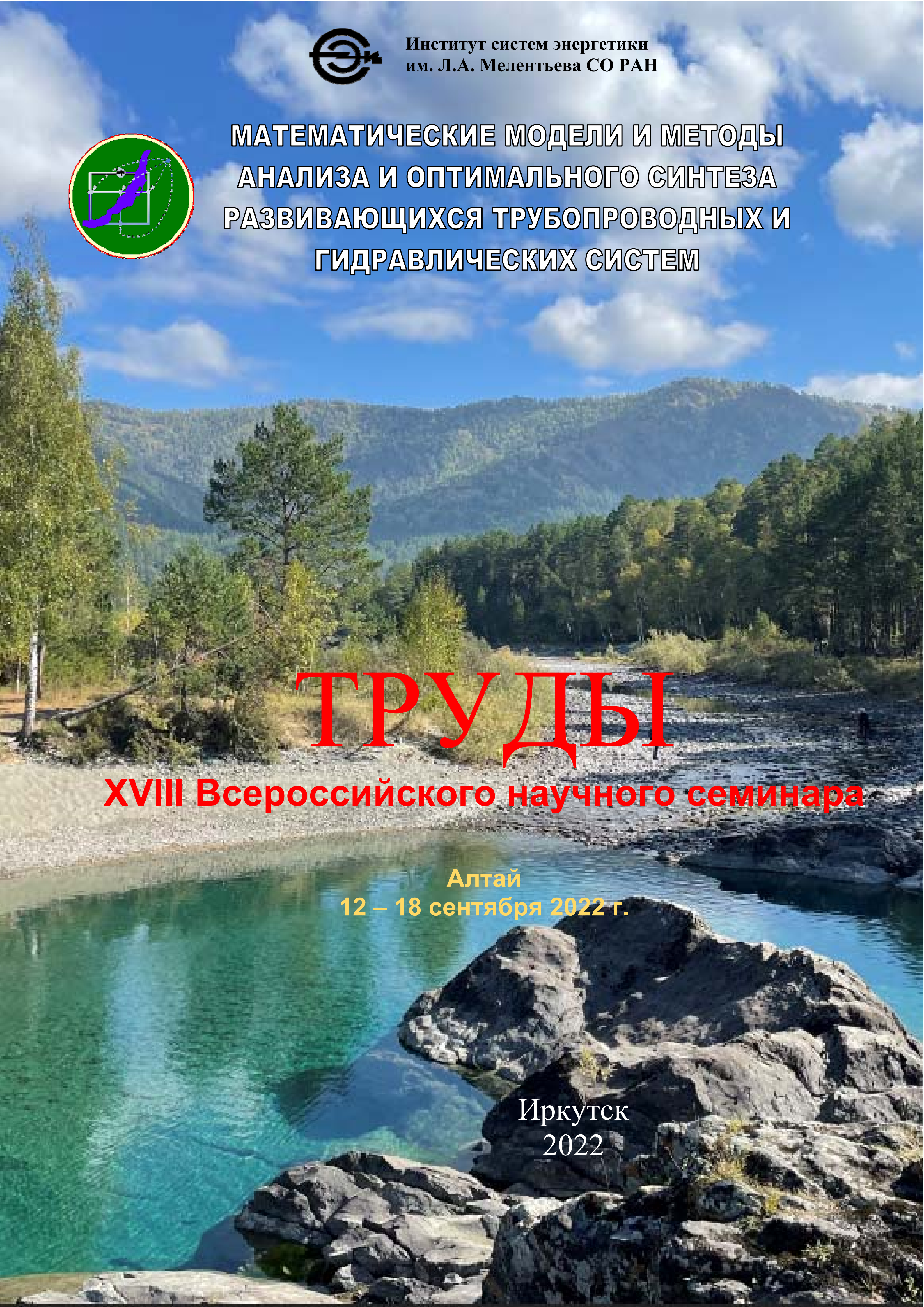

Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ

XVIII Всероссийского научного семинара

Алтай
12 – 18 сентября 2022 г.

Иркутск
2022

ФГБУН Институт Систем Энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН

XVIII Всероссийский научный семинар

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Труды семинара

12 – 18 сентября 2022 г.

Алтай

Иркутск
2022

УДК 519.6+519.8

Труды XVIII Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Алтай, 12 – 18 сентября 2022 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2022. – 477 с.

ISBN 978-5-93908-155-9.

В сборнике научных трудов обсуждаются актуальные проблемы математического моделирования трубопроводных систем (ТПС) энергетики – тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения, а также развития методов теории гидравлических цепей, имеющих межотраслевое значение.

Сборник предназначен для сотрудников научно-исследовательских, проектных и производственных организаций, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Ответственный за выпуск: к.т.н. Токарев Вячеслав Вадимович

Без объявления.

ISBN 978-5-93908-155-9

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И МОНОТОННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДАВЛЕНИЯ ЗАМЫКАЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ И ОБРАТНЫМИ КЛАПАНАМИ

Корельштейн Л.Б.

(ООО «НТП Трубопровод», г. Москва)

Аннотация

В данной статье, продолжающей идеи статей [1-5], установлены условия существования и единственности решения классической задачи потокораспределения в гидравлических цепях с ветвями, имеющими зависящие от давления характеристики (замыкающие соотношения) и содержащими обратные клапаны.

Введение

В предыдущих статьях автора [1, 2, 4, 5] уже были изучены свойства монотонности гидравлических цепей с ветвями, имеющими зависящие от давления. но при этом строго монотонные характеристики (методы расчета для таких цепей изучались также в [10-13], о монотонности в гидравлических цепях см. также [14]), и на их основе было доказано существование и единственность решения классической задачи потокораспределения (КЗП) – в развитие работ [15, 16], которые, к сожалению, остались в свое время практически не замеченными. Были также рассмотрены гидравлические цепи нестрого монотонными характеристиками из-за возникновения критического течения, и установлены условия существования и единственности решения КЗП для подобных сетей [3].

В данной статье рассматривается другой случай потери строгой монотонности характеристик ветвей, связанный с установкой обратных клапанов. Такие клапаны обычно устанавливаются после насосов и компрессоров, а также на выходах из аппаратов для предотвращения обратного движения потока. В данной статье мы рассмотрим, в какой степени результаты предыдущих статей можно перенести на гидравлические цепи с обратными клапанами.

Постановка задачи и ограничения на характеристики ветвей

Пусть G - ориентированный граф с N_V узлами (образующими множество узлов V) и N_E ветвями (образующими множество ветвей E). Расход X_i по i-той ветви связан с начальным и конечным давлениями P_{Fi} и P_{Li} замыкающим соотношением

$$X_i = \varphi_i(P_{Fi}, P_{Li}) \quad (1)$$

Пусть A - матрица инцидентности графа G ($a_{ij} = 1$, если ребро j начинается в узле i; $a_{ij} = -1$, если ребро j заканчивается в узле i; $a_{ij} = 0$ в остальных случаях); Q - вектор узловых притоков. Тогда уравнения Кирхгофа (уравнения балансов в узлах) записываются в виде

$$AX = Q \tag{2}$$

Используя матрицы A_F и A_L, соответствующие выходящим и входящим ветвям ($A = A_F + A_L$), вектор узловых давлений P и отображение $\Phi: (P_F, P_L) \mapsto X$, определяемое уравнениями (1), можно записать последние в виде

$$X = \Phi(P_F, P_L),\ P_F = A_F^T P,\ P_L = -A_L^T P \tag{3}$$

Таким образом, имеем $N_V + N_E$ уравнений для $2N_V + N_E$ неизвестных (P, Q и X). При этом, как известно, для связного графа G матрица A в уравнении (2) имеет ранг $N_V - 1$, при этом притоки в узлах удовлетворяют дополнительному уравнению баланса:

$$\sum_{i=1}^{N_V} Q_i = 0 \tag{4}$$

Как видим, для связного графа G неизвестных на N_V больше, чем независимых уравнений, поэтому, чтобы задача была определенной, должны быть заданы значения N_V неизвестных.

В классической задаче потокораспределения (КЗП) задается вектор давлений P_{fix} в $N_P > 0$ узлах (образующих множество V_P) и вектор притоков Q_{fix} в остальных $N_Q = N_V - N_P$ узлах (образующих множество V_Q), при этом требуется найти давления P_{var} в остальных N_Q узлах, расходы по ветвям X и притоки Q_{var} в N_P узлах с заданным давлением. Последние определяются по уравнениям (1) и (2), так что найти, по существу, достаточно давления P_{var} в узлах с заданными притоками. Таким образом, решение КЗП $S\,(P_{var}, X, Q_{var})$ представляет собой набор векторов не заданных узловых давлений, расходов по ветвям и узловых притоков, удовлетворяющих уравнениям (2), (3).

Для «традиционных» гидравлических цепей функции φ_i зависят только от разности давлений: $X_i = \varphi_i(P_{Fi} - P_{Li})$. В работе [6] сформулированы условия для функций φ_i (или обратных к ним функций f_i), при которых решение КЗП для «традиционных» гидравлических цепей гарантированно существует и единственно, а именно (Условия А):

1) Непрерывность;
2) Строгое монотонное возрастание;
3) Определенность на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$;
4) Совпадение области значений с $\mathbb{R}$, что с учетом монотонности эквивалентно условиям $\varphi_i(y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и $\varphi_i(y) \to -\infty$ при $y \to -\infty$.

Строгая монотонность функции необходима для обеспечения единственности решения; непрерывность и возрастание вытекают из физических соображений. Эти условия почти всегда реализуются на практике.

Условия 3) и 4) являются только удобной математической экстраполяцией, призванной обеспечить существование решения при любых заданных давлениях и узловых притоках. Они гарантируют, что φ_i отображает $\mathbb{R}$ на себя взаимно-однозначно. На самом деле на практике область значений давлений всегда ограничена – почти всегда снизу (обычно как минимум положительностью абсолютных давлений), а часто и сверху (технологическими ограничениями, прочностью конструкции и т. д.), соответственно ограничены и величины возможных расходов и узловых притоков. На практике желательно иметь оценки границ величин заданных узловых давлений и узловых притоков, при которых задача заведомо имеет решение в рамках заданных границ изменения аргументов функций φ_i и f_i. Это, однако, самостоятельная (весьма практически важная и непростая) задача.

Множество функций, удовлетворяющих описанным выше условиям 1)-4), обозначим как $\tilde{Z}_a$. Оно отличается от введенного в [6-9] множества $\tilde{Z}$ только отсутствием условия равенства нулю в нуле. Множество функций $\tilde{Z}_a$ получается из $\tilde{Z}$ прибавлением к функциям произвольной постоянной. Функции из $\tilde{Z}$ представляют собой так называемые пассивные ветви (для которых расход при нулевом перепаде давлений =0), а функции из $\tilde{Z}_a$ включают в себя и активные ветви (с перепадом высот, насосами, компрессорами и т.п.).

Установка на ветви обратного клапана (будем всегда считать, что он установлен так, чтобы предотвратить течение против направления ветви – в противном случае можно просто обратить направление ветви) приводит к обнулению всех отрицательных расходов. В связи с этим логично рассмотреть в качестве допустимых характеристик ветвей с обратными клапанами множество функций $\tilde{Z}_a^+$, получающихся из $\tilde{Z}_a$ обнулением отрицательных значений, то есть принимающих только неотрицательные значения и совпадающих с какой-либо функцией из $\tilde{Z}_a$ для всех положительных значений. Легко видеть, что множество $\tilde{Z}_a^+$ можно эквивалентным образом определить следующим набором условий A+

1) Непрерывность;
2) Неотрицательность;
3) Монотонное возрастание, строгое для положительных значений;
4) Определенность на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$;
5) Совпадение области значений с $[0, +\infty)$, что с учетом монотонности эквивалентно условиям $\varphi_i(y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и $\varphi_i(y) = 0$ при $y \to -\infty$.

Иначе говоря, функции из $\tilde{Z}_a^+$ принимают значение 0 на замкнутой полуоси – а далее принимают положительные значения и строго монотонны.

В самом деле, любая функция, полученная обнулением отрицательных значений функции из $\tilde{Z}_a$, удовлетворяет этим условиям. Пусть φ удовлетворяет условиям А+ и y_0 – максимальное значение, при котором φ =0. Определим функцию ψ, симметрично продолжив φ относительно точки $(y_0, 0)$: $\psi(y) = \varphi(y)$ при $y \geq y_0$ и $\psi(y) = -\varphi(2y_0 - y)$ при $y < y_0$. Тогда $\psi \in \tilde{Z}_a$ и совпадает с φ на всех положительных значениях.

Определим теперь аналогичные множества допустимых функций для зависящих от давления замыкающих соотношений.

Множество $\tilde{Z}_a^2$ представляет собой естественное обобщение множества $\tilde{Z}_a$. Функция $\varphi \in \tilde{Z}_a^2$, если выполняются следующие условия (Условия А2):

1) $\varphi(P_F, P_L)$ является непрерывной функцией двух переменных P_F, P_L;
2) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F убывает по P_L;
3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L возрастает по P_F;
4) $\varphi(P_F, P_L)$ определена на всем $\mathbb{R}^2$.
5) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_L \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_L \to -\infty$
6) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_F \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_F \to -\infty$

Иначе говоря, множество $\tilde{Z}_a^2$ составляют непрерывные функции, которые при любом P_L принадлежат $\tilde{Z}_a$ как функции от P_F и при любом P_F принадлежат $-\tilde{Z}_a$ как функции от P_L.

Так же, как и в случае множества $\tilde{Z}_a$, условия 1)-3) основываются на физических соображениях – а условия 4)-6) являются математической экстраполяцией.

Определим подмножество функций $\tilde{Z}^2$ множества $\tilde{Z}_a^2$, как функции, для которых $\varphi(P, P) = 0$ при любом P. Функции из $\tilde{Z}^2$ представляют собой характеристики пассивных ветвей, а $\tilde{Z}_a^2$ включают и активные ветви.

Аналогично $\tilde{Z}_a^+$ рассмотрим множество функций $\tilde{Z}_a^{2+}$, получающееся из $\tilde{Z}_a^2$ обнулением отрицательных значений функций. Такие функции логично считать характеристиками ветвей с обратным клапаном. Это множество также можно описать явно следующим набором условий А2+ (которые уже не столь очевидны – особенно последнее):

1) $\varphi(P_F, P_L)$ является непрерывной функцией двух переменных P_F, P_L;
2) $\varphi(P_F, P_L) \geq 0$
3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F убывает по P_L, причем строго убывает для положительных значений;
4) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L возрастает по P_F, причем строго возрастает для положительных значений;
5) $\varphi(P_F, P_L)$ определена на всем $\mathbb{R}^2$.
6) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) = 0$ при $P_L \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_L \to -\infty$
7) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_F \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) = 0$ при $P_F \to -\infty$

8) Граница области нулевых значений $\varphi_b(P_F) = \min_{P_L}[\varphi(P_F, P_L) = 0]$ представляет собой функцию, принадлежащую множеству $\tilde{Z}_a$, то есть непрерывна, строго монотонно возрастает и отображает $\mathbb{R}$ на себя.

В самом деле, пусть $\psi \in \tilde{Z}_a^2$, а φ получена из нее обнулением отрицательных значений. Очевидно, что приведенные выше условия 1-7 для φ выполняются. Граница $\varphi_b(P_F)$ определяется уравнением $\psi(P_F, P_L) = 0$, и ее непрерывность следует из специального «недифференциального» варианта теоремы о неявной функции [17, 18]. Выполнение остальных частей условия 8 очевидно.

Пусть теперь φ удовлетворяет условиям А2+. Выберем произвольную функцию $f \in \tilde{Z}$ и определим функцию $\psi(P_F, P_L)$ следующим образом: $\psi(P_F, P_L) = \varphi(P_F, P_L)$, когда $\varphi(P_F, P_L) > 0$, и $\psi(P_F, P_L) = f(\varphi_b(P_F) - P_L)$ при $\varphi(P_F, P_L) = 0$. Определенная таким образом $\psi \in \tilde{Z}_a^2$ и совпадает с φ при обнулении отрицательных значений.

Заметим, что для подмножества функций $\tilde{Z}^{2+}$, получаемых обнулением отрицательных значений функций из $\tilde{Z}^2$, граница представляет собой прямую $\varphi_b(P_F) = P_F$.

Далее будем изучать поведение решений КЗП на графах, часть ветвей которых содержит обратные клапаны (имеет характеристики из $\tilde{Z}_a^{2+}$), а часть не содержит (с характеристиками из $\tilde{Z}_a^2$).

Заметим, что любая зависящая только от разности давлений характеристика ветви, удовлетворяющая какому-либо условию из списка А или А+, удовлетворяет и соответствующему условию(ям) из списка А2 или А2+. Тем самым все установленные далее результаты будут справедливы и для «традиционных» гидравлических цепей.

Вспомогательные определения и основной результат статьи

Обозначим E^+ множество ветвей с обратными клапанами (то есть с характеристиками из $\tilde{Z}_a^{2+}$), и $E^0 = E \backslash E^+$ - множество ветвей без обратного клапана (с характеристиками из $\tilde{Z}_a^2$). Пусть G^0 граф, получающийся из G удалением всех ветвей из E^+, и V_c – множество его связных компонент. V_c состоит из двух подмножеств – множества (непустого!) V_{cp} связных компонент, имеющих хотя бы один узел из V_p, и множества связных компонент V_{cQ} (оно может быть и пустым), все узлы которых принадлежат V_Q. Для любой связной компоненты из V_{cQ} можно определить приток как сумму заданных притоков всех его узлов. Для любого непустого подмножества $X \subset V_{cQ}$ определим приток как сумму притоков его элементов: $Q(X) = \sum_{x \in X} Q(x)$.

Будем называть непустое подмножество $X \subset V_{cQ}$ связным, если связным является подграф G_X, состоящий из компонент, входящих в X, и всех соединяющих их ребер E^+. Очевидно, что несвязанные подмножества являются объединением нескольких связных.

Пусть $X \subseteq V_{cQ}$ и $X \neq \emptyset$. Очевидно, что узлы из компонент в X соединены с остальными узлами графа G только ветвями из E^+. Если все такие ветви начинаются в узлах из X, будет называть X множеством – источником; если все такие ветви заканчиваются в уздах из X – множеством – стоком; если таких ветвей нет вообще – изолированным множеством. Множества, являющиеся источниками, стоками или изолированными множествами, будем также называть терминальными.

Очевидно, что из баланса расходов следует, что для множества-источника $Q(X) \geq 0$, для стока $Q(X) \leq 0$, а для изолированного множества $Q(X) = 0$. Если для заданных притоков эти условия не выполняются (то есть для источника $Q(X) < 0$, для стока $Q(X) > 0$, для изолированного множества $Q(X) \neq 0$), такое подмножество V_{cQ} будем называть не сбалансированным по притокам. Очевидно, если в графе есть хоть одно не сбалансированное по притокам подмножество V_{cQ}, то решение КЗП существовать не может. Заметим также, что если подмножество не сбалансировано по притокам, то и хотя бы одно из составляющих его связных подмножеств не сбалансировано.

Пусть $X \subset V_{cQ}$ – некоторое собственное терминальное подмножество V_{cQ}. Все входящие в компоненты X узлы и все соединяющие их ветви образуют граф G_X – подграф графа G. Для него также можно рассмотреть подграф G_X^0 без ребер из E^+ и множество его связных компонент $V_{cQ}(X)$. Очевидно, что $V_{cQ}(X) \subset V_{cQ}$. Пусть $X' \subset V_{cQ}(X)$ – некоторое собственное терминальное подмножество $V_{cQ}(X)$ в G_X. Тогда одно из подмножеств - X' либо $V_{cQ}(X) \backslash X'$ - является терминальным и для G.

В самом деле, пусть X – источник; тогда если X' - источник в G_X, то он очевидно является источником и в G. Если же X' - сток в G_X, то $V_{cQ}(X) \backslash X'$ - источник и в G_X, и в G. Аналогично, если X – сток, то либо X', либо $V_{cQ}(X) \backslash X'$ - сток и в G_X, и в G. Если же X или X' изолированы, то терминальными в G являются и X', и $V_{cQ}(X) \backslash X'$.

При этом если $Q(X) = 0$ и $Q(X') = 0$, то и $Q\left(V_{cQ}(X) \backslash X'\right) = Q(X) - Q(X') = 0$, то есть внутри X обнаруживается другое терминальное подмножество с нулевым притоком. Этот процесс можно продолжать для X', пока не придем к некоторому терминальному подмножеству X^*, для которого $Q(X^*) = 0$ и внутри которого уже нет собственных терминальных подмножеств с нулевым притоком. Подобные подмножества (будем их называть «минимальными терминальными подмножествами с нулевым притоком») представляют собой весьма удобные (как будет видно далее) подграфы для построения и изучения решений КЗП.

Оказывается, что существование решения КЗП полностью определяется знаком $Q(X)$ на подмножествах V_{cQ}, а именно:

Решение КЗП существует тогда и только тогда, когда V_{cQ} не содержит не сбалансированных терминальных связных подмножеств.

Таким образом, можно заранее проверить, существует ли решение КЗП для цепи с обратными клапанами, не решая саму КЗП.

Единственность решения также в большинстве случаев определяется знаком $Q(X)$ на подмножествах V_{cQ}. Пусть условие существования решения выполнено, и V_{cQ} не содержит не сбалансированных терминальных связных подмножеств. Тогда

1. **Если для всех связных подмножеств $X \subset V_{cQ}$ $Q(X) \neq 0$, то решение КЗП единственно;**
2. **Если $Q(X) = 0$ для некоторого связного терминального $X \subset V_{cQ}$, то решений КЗП бесконечно много;**
3. **Если $Q(X) \neq 0$ для всех связных терминальных $X \subset V_{cQ}$, но $Q(X) = 0$ для одного или нескольких не терминальных связных $X \subset V_{cQ}$, то решение может быть как единственным, так и не единственным (это зависит от соотношения заданных узловых давлений и других исходных данных).**

Заметим, что для «традиционных» гидравлических цепей (с характеристиками ветвей из $\tilde{Z}_a$ и $\tilde{Z}_a^+$, то есть зависящими только от разности давлений) даже если решение не единственно, **все решения отличаются только давлениями в узлах V_Q, а расходы по ветвям во всех решениях совпадают**. Для гидравлических цепей с зависящими от давления характеристиками это уже не так.

Дальнейшее изложение посвящено доказательству этих и некоторых дополнительных результатов. Последуем в целом тому же ходу изложения (и терминологии), что в статьях [1, 2, 4], и посмотрим, в какой мере изложенные там результаты могут быть перенесены на гидравлические цепи с обратными клапанами.

Единственность и свойства монотонности решения КЗП

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ - некоторое непустое открытое связное множество, и все функции φ_i определены на $\Omega \times \Omega$. В качестве Ω может выступать $\mathbb{R}$, либо полупрямая, либо открытый интервал (ограниченный нижней и верхней границами давления). Рассмотрим сначала функции φ_i, удовлетворяющие условиям монотонности 2 и 3 условий А2 или условиям 2-4 А2+, не будем пока накладывать на них даже условия непрерывности! Оказывается, уже и этих условий достаточно для обеспечения некоторых свойств единственности и свойств монотонности решения КЗП, аналогичных установленным для цепей без обратных клапанов в [1, 2, 4].

Пусть $P \in \Omega^{N_V}$ – вектор узловых давлений. Тогда уравнения (1) и (2) полностью определяют расходы по ветвям и притоки в узлах. Изучим, как меняются притоки в узлах при изменении узловых давлений.

Лемма 1 (о притоках в узлах).

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям монотонности 2 и 3 условий А2 или условиям 2-4 А2+., P^1 и P^2 – векторы узловых давлений, X^1, X^2, Q^1, Q^2 – определенные по уравнениям (1) и (2) соответствующие векторы расходов и узловых притоков.

Пусть E_0^{1+} и E_0^{2+} - подмножества ветвей E^+ с нулевыми расходами X^1 и X^2 соответственно («перекрытые» обратными клапанами ветви), $E_0^{12+} = E_0^{1+} \cap E_0^{2+}$.

Определим множества узлов следующим образом:

V^+ - множество тех узлов, для которых $P_i^2 > P_i^1$ (давление увеличилось);

V^- - множество тех узлов, для которых $P_i^2 < P_i^1$ (давление уменьшилось);

V^0 - множество тех узлов, для которых $P_i^2 = P_i^1$ (давление не изменилось);

V^{0+} - подмножество тех узлов V^0, которые соединены ветвью(ями) с узлом из V^+, но не соединены с узлами из V^-;

V^{0-} - подмножество тех узлов V^0, которые соединены ветвью(ями) с узлом из V^-, но не соединены с узлами из V^+;

$V^{0\pm}$ - подмножество тех узлов V^0, которые соединены ветвями с узлом(ами) и из V^+, и из V^-;

V^{00} - подмножество тех узлов V^0, которые не соединены ветвями с узлами из V^+ или V^- (то есть соединены только с узлами из V^0).

Тогда:

Для любого узла $v \in V^{00}$ $Q^2(v) = Q^1(v)$.

Для любого узла $v \in V^{0+}$ $Q^2(v) \le Q^1(v)$, причем $Q^2(v) = Q^1(v)$ только если все соединяющие v с V^+ ветви $\in E_0^{12+}$.

Для любого узла $v \in V^{0-}$ $Q^2(v) \ge Q^1(v)$, причем $Q^2(v) = Q^1(v)$ только если все соединяющие v с V^- ветви $\in E_0^{12+}$

Если $V^+ \ne \emptyset$ и $V^+ \ne V$, то $\sum_{v \in V^+} Q^2(v) \ge \sum_{v \in V^+} Q^1(v)$, причем в случае равенства $\sum_{v \in V^+} Q^2(v) = \sum_{v \in V^+} Q^1(v) = 0$ все ветви, соединяющие узлы V^+ с остальными узлами $\in E_0^{12+}$ (то есть перекрыты для обоих наборов узловых давлений и расходов)

Если $V^- \ne \emptyset$ и $V^- \ne V$, то $\sum_{v \in V^-} Q^2(v) \le \sum_{v \in V^-} Q^1(v)$, причем в случае равенства $\sum_{v \in V^+} Q^2(v) = \sum_{v \in V^+} Q^1(v) = 0$ все ветви, соединяющие узлы V^- с остальными узлами $\in E_0^{12+}$ (то есть перекрыты для обоих наборов узловых давлений и расходов)

Заметим, что про притоки в узлах из $V^{0\pm}$ априори ничего сказать нельзя.

Доказательство леммы совершенно аналогично изложенному в [1, 2, 4].

Лемма 2 (о совпадении решений КЗП)

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям монотонности 2 и 3 условий А2 или условиям 2-4 А2+, а $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ и $S^2(P^2,X^2,Q^2)$ – решения одной и той же КЗП, E_0^{1+} и E_0^{2+} - подмножества ветвей E^+ с нулевыми расходами X^1 и X^2 соответственно («перекрытые» обратными клапанами ветви), $E_0^{12+} = E_0^{1+} \cap E_0^{2+}$, G_0^{12} – граф G без ребер E_0^{12+}. Если G_0^{12} не содержит связных компонент без узлов с заданным давлением, то S^1 и S^2 совпадают.

Доказательство леммы 2.

Рассмотрим множества узлов V^+ и V^-. Если хотя бы одно из них не пустое, то сумма притоков по нему одинакова для обоих решений (т.к. в этих множествах только узлы с заданными притоками). Но согласно пп.4 и 5 леммы 1, это возможно только если G_0^{12} содержит связные компонент без узлов с заданным давлением. Следовательно множества узлов V^+ и V^- пусты, и S^1 и S^2 совпадают.

Из леммы 2 очевидно вытекают следующие теоремы.

Теорема 1 (о единственности решения КЗП).

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям монотонности 2 и 3 условий А2 или условиям 2-4 А2+. Если для всех связных подмножеств $X \subset V_{cQ}$ $Q(X) \neq 0$, то решение задачи КЗП (если оно существует) единственно.

Теорема 1А.

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям монотонности 2 и 3 условий А2 или условиям 2-4 А2+, и $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ – решение задачи КЗП, E_0^{1+} - множество ветвей, перекрытых обратными клапанами для данного решения, G^{01} - граф, получающийся из G удалением всех ветвей из E_0^{1+}. Если в G^{01} нет связных компонент без узлов с заданным давлением, то решение S^1 единственно.

Важный часто встречающийся на практике частный случай – когда $V_{cQ} = \emptyset$ - иначе говоря, когда все связные компоненты G^0 содержат узлы с заданным давлением. В этом случае, согласно доказанной теореме, решение КЗП всегда единственно.

Как мы видим, не единственность решения КЗП в цепях с обратными клапанами всегда обусловлена образованием полностью изолированных кусков цепи без узлов с заданным давлением.

Для «традиционных» гидравлических ветвей ситуация еще проще.

Теорема 1Б.

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям монотонности 2 и 3 условий А или условиям 2-3 А+. Тогда все решения КЗП могут отличаться только узловыми давлениями, а расходы по ветвям и притоки для всех решений совпадают.

Доказательство теоремы 1Б

Проведем доказательство по индукции по числу узлов графа.

Случай одного или двух узлов легко проверяется непосредственно.

Пусть есть 2 решения КЗП - $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ и $S^2(P^2,X^2,Q^2)$. Покажем, что для них расходы по ветвям совпадают. Снова рассмотрим множества узлов V^+ и V^-. Если они оба пусты, то решения полностью совпадают. Рассмотрим случай, когда одно из них или оба не пусты. Из леммы следует, что все ветви, соединяющие их с остальными узлами и друг с другом, перекрыты обратными клапанами и расход по ним нулевой. На ветвях, соединяющих узлы V^0, расходы для обоих решений одинаковы. Остаются ветви внутри V^+ и V^-. Пусть V^+ не пусто, выберем некоторый узел $v \in V^+$. Рассмотрим КЗП на графе из узлов V^+ и соединяющих их ветвей, для которой задано узловое давление $P^2(v)$ в узле v и притоки в остальных ветвях. Очевидно, что S^2 является решением этой задачи. Рассмотрим решение S^3, имеющее те же расходы и притоки, что S^1, но с узловыми давлениями $P_i^3 = P_i^1 + P^2(v) - P^1(v)$ в узлах V^+. Оно также будет решением новой КЗП на графе из узлов V^+. По предположению индукции расходы на ветвях для этих двух решений совпадают – а следовательно совпадают и расходы решений S^1 и S^2 на соединяющих узлы V^+ ветвях. Совпадение для ветвей, соединяющих V^-, доказывается аналогично.

Изучим теперь, как влияет на решение КЗП изменение исходных данных – заданных давлений и узловых притоков. Теорема о монотонности для цепей с обратными клапанами выглядит следующим образом.

Теорема 2 (о монотонности решения КЗП).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности, на котором заданы 2 задачи КЗП (задача 1 и 2) с совпадающими непустыми множествами V_P и V_Q, и заданными давлениями $P_{fix}^{(1)}$ и $P_{fix}^{(2)}$ и заданными притоками $Q_{fix}^{(1)}$ и $Q_{fix}^{(2)}$, причем $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix}^{(2)}$, а $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ и $S^2(P^2,X^2,Q^2)$ – решения этих задач, E_0^{1+} и E_0^{2+} - подмножества ветвей E^+ с нулевыми расходами X^1 и X^2 соответственно («перекрытые» обратными клапанами ветви), $E_0^{12+} = E_0^{1+} \cap E_0^{2+}$, G_0^{12} – граф G без ребер E_0^{12+}.

Граф G_0^{12} может состоять из нескольких связных компонент – как содержащих узлы только из V_Q, так и содержащих хотя бы один узел из V_P.

Каждый из последних является объединением Р-компонент, как это описано в [1, 2, 4]. Пункты теоремы 1 и 2 относятся к последним, п.5 к первым.

Обозначим V_P^+ и V_Q^+ множества узлов с заданными давлениями и притоками, для которых неравенство между исходными данными строгое. Если G_0^{12} не содержит связных компонент без узлов с заданным давлением, то:

1. Во всех Р-компонентах G_0^{12}, где есть узлы из V_P^+ или V_Q^+, во всех узлах $v \in V_Q$ $P^2(v) > P^1(v)$. В остальных Р-компонентах G_0^{12} во всех узлах $v \in V_Q$ $P^2(v) = P^1(v)$.
2. Если $N_P = 1$ и $V_Q^+ \neq \emptyset$, то в единственном узле v с заданным давлением $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$, иначе $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.
3. Если $N_P > 1$, то $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$ для всех узлов $v \in V_P \setminus V_P^+$ принадлежащих хотя бы одному Р-компоненту G_0^{12}, где есть узлы $V_Q^+ \cup V_P^+$, либо соединенных ветвью с узлами из V_P^+. Для всех остальных узлов $v \in V_P \setminus V_P^+$ $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.
4. Если $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \neq \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \neq \emptyset$, то справедливы неравенства $\sum_{v\in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) \le \sum_{v\in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$ и $\sum_{v\in V_P\setminus V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) \ge \sum_{v\in V_P\setminus V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$. Если есть хотя бы одна пара узлов из $V_P \setminus V_P^+$ и V_P^+, соединенных ветвью или принадлежащих одному и тому же Р-компоненту G_0^{12}, то неравенства строгие.
5. Для любой связной компоненты G_0^{12} без узлов из V_P, для всех узлов $Q_{fix}^{(1)} = Q_{fix}^{(2)}$, а соотношение узловых давлений одинаково для всех узлов этой связной компоненты (т.е. либо $P^2(v) > P^1(v)$, либо $P^2(v) < P^1(v)$, либо $P^2(v) = P^1(v)$).

<u>Доказательство Теоремы 2.</u>

Доказательство пп.1-4 совершенно аналогично доказательству аналогичной теоремы в [1, 2, 4].

Докажем п.5. В любом связном компоненте G_0^{12} без узлов из V_P, сумма узловых притоков должна быть равна нулю по условию баланса расходов. В то же время задано, что $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix}^{(2)}$. Отсюда для всех узлов компоненты $Q_{fix}^{(1)} = Q_{fix}^{(2)}$. Рассмотрим далее множества узлов V^0, V^+ и V^- в этом компоненте. Сумма притоков по узлам каждого из них (если оно не пустое) должна быть одинакова для обоих решений. Но согласно лемме 1, это невозможно, если хотя бы 2 из этих 3-х множеств не пусты для данной связной компоненты. Следовательно, не пусто только одно из множеств, что и требовалось доказать.

Непрерывность решения КЗП

Рассмотрим теперь сети с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 1-3 списка А2 либо условиям 1-4 и условию 8 (в части непрерывности и строгой монотонности) списка А2+. Посмотрим, какие дополнительные свойства решения КЗП это влечет.

Обозначим Y вектор, составленный из исходных данных КЗП – первые N_P компонент - заданные узловые давления P_{fix}, остальные N_Q – заданные узловые притоки Q_{fix}; $Y \in \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$. Обозначим через E множество тех Y, для которых КЗП имеет решение, а через E_U – множество тех Y, для которых это решение единственно.

Рассмотрим отображение $\Psi: \Omega^{N_V} \to \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$, ставящее в соответствие вектору узловых давлений P вектор Y, составленный из давлений P_i в узлах из V_P и расходов Q_i в узлах из V_Q, рассчитанных из P по уравнениям (1)-(2). Фактически отображение Ψ ставит в соответствие вектору P исходные данные той КЗП, решением которой он является. Поэтому $E = \Psi(\Omega^{N_V})$. Поскольку характеристики ветвей непрерывны, отображение Ψ непрерывно.

Обозначим как $U1$ (очевидно открытое) множество всех векторов $Y \in \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$ таких, для которых для всех связных подмножеств $X \subset V_{cQ}$ $Q(X) \neq 0$, а как $U2$ множество всех векторов узловых давлений $P \in \Omega^{N_V}$ таких, для которых у $\Psi(P)$ в G^{01} нет связных компонент без узлов с заданным давлением, и пусть $E_{U1} = U1 \cap E$, $E_{U2} = \Psi(U2)$. Согласно теоремам 1 и 1А $E_{U1} \subseteq E_{U2} \subseteq E_U \subseteq E$ и, следовательно $E_{U1} = U1 \cap E_{U2}$.

Если $U2 \neq \emptyset$, то оно очевидно открыто, и Ψ отображает $U2$ на E_{U2} взаимно-однозначно. Тогда в соответствии с теоремой Брауэра об инвариантности области $U2$ и E_{U2} гомеоморфны, следовательно E_{U2} открыто (и $E_{U1} = U1 \cap E_{U2}$ тоже), а Ψ^{-1} непрерыно на E_{U2}. Тем самым доказана

<u>Теорема 3 (о непрерывности и свойствах монотонности решения КЗП).</u>

Пусть G –граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 1-3 списка А2 либо условиям 1-4 и условию 8 (в части непрерывности и строгой монотонности) списка А2+, и $U2 \neq \emptyset$. Тогда:

1. Все параметры решения КЗП (узловые давления, расходы, притоки) являются непрерывными функциями исходных данных на E_{U2} и E_{U1}.
2. Решение обладает следующими свойствами монотонности от исходных данных, описанными в теореме 2, а именно
   a. Давления во всех узлах из V_Q строго монотонно возрастают при возрастании заданных притоков и заданных давлений в узлах

своего Р-компонента графа G_0 текущего решения, и не зависят от других исходных данных.

b. Притоки во всех узлах из V_P строго монотонно убывают при возрастании заданных притоков в узлах Р-компонент графа G_0 текущего решения, в которые они входят, и не зависят от заданных притоков в других узлах.

c. Приток в узле из V_P:

   i. Строго возрастает при росте давления в том же узле, если в том же связном компоненте графа G_0 текущего решения есть другие узлы с заданным давлением.

   ii. Строго убывает при росте давления в другом узле с заданным давлением из того же Р-компонента графа G_0 текущего решения.

   iii. Не меняется во всех остальных случаях.

Теорема о существовании решения КЗП

Докажем теперь основную теорему существования КЗП для гидравлических цепей с обратными клапанами.

<u>**Теорема 4 (о существовании решения КЗП)**</u>

Пусть G - граф с характеристиками всех ветвей, удовлетворяющими условиям А2 или А2+, для которого задана КЗП, и для него V_{cQ} не содержит не сбалансированных терминальных связных подмножеств. Тогда решение КЗП существует.

<u>Доказательство теоремы 4.</u>

Проведем доказательство по индукции по числу узлов графа с заданным притоком N_Q.

При $N_Q = 0$ решение КЗП просто дается формулами (1), (2).

Пусть есть удовлетворяющий условиям теоремы граф G с $N_Q > 0$, и по предположению индукции теорема справедлива для всех графов с меньшим числом узлов с заданным притоком. Покажем, что решение КЗП для данного графа существует.

Рассмотрим сначала случай, когда для всех связных подмножеств $X \subset V_{cQ}$ $Q(X) \neq 0$, то есть, когда решение (если оно существует) согласно теореме 1 единственно.

В этом случае в G должен существовать хотя бы один узел с заданным притоком, соединенный ветвью с хотя бы одним узлом с заданным давлением – в противном случае в G были бы одна или несколько связных компонент без узлов с заданным давлением, и для них суммарный приток должен был бы быть равным 0 (иначе они были изолированными несбалансированными множествами узлов). Пусть $v \in V_Q$ – такой узел.

Рассмотрим на графе G другую КЗП, исходные данные котором отличаются только тем, что в узле v задается давление $P(v)$. Очевидно, условие теоремы для новой КЗП также выполнено, при этом узлов с заданном притоком всего $N_Q - 1$, следовательно новая КЗП по предположению индукции всегда имеет решение, причем согласно теореме 1 это решение единственно, и согласно теореме 3 его зависимость от $P(v)$ обладает свойствами непрерывности и монотонности. Посмотрим, как именно приток $Q(v)$ для этого решения зависит от $P(v)$. Из теоремы 3 следует, что $Q(v)$ зависит от $P(v)$ непрерывно, и монотонно возрастает – однако не обязательно всегда строго монотонно. Пусть $P(v)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ - каков будет диапазон изменения $Q(v)$?

Давления в узлах V_Q монотонно возрастают с ростом $P(v)$ (но не обязательно строго). Как они ведут себя, когда $P(v) \to +\infty$? Пусть $V^{+\infty}$ - множество узлов, для которых давление $\to +\infty$ при $P(v) \to +\infty$. Множества $V^{+\infty}$ и $V \backslash V^{+\infty}$ не пусты ($V^{+\infty}$ содержит как минимум узел v, а $V \backslash V^{+\infty}$ - исходные узлы V_P). Если узлы этих множеств соединены хотя бы одной ветвью из E^0 или ветвью из E^+, направленной из $V^{+\infty}$ в $V \backslash V^{+\infty}$, то в силу свойств характеристик ветвей суммарный поток из $V^{+\infty}$ в $V \backslash V^{+\infty} \to +\infty$ при $P(v) \to +\infty$, а поскольку он равен суммарного притоку в узлы $V^{+\infty}$, и притоки во всех остальных узлах $V^{+\infty}$, кроме v, заданы, получаем что $Q(v) \to +\infty$ при $P(v) \to +\infty$. Если же все ветви, соединяющие $V^{+\infty}$ и $V \backslash V^{+\infty}$, $\in E^+$ и направлены из $V \backslash V^{+\infty}$ в $V^{+\infty}$, то при $P(v) \to +\infty$ начиная с некоторого значения $P(v)$ все эти ветви будут перекрыты, и $Q(v)$ достигнет максимального значения $Q_{max}(v)$. При этом $V^{+\infty}$ оказывается множеством – стоком, и из условий теоремы $Q(V^{+\infty}) \leq 0$ (и даже $Q(V^{+\infty}) < 0$ – т.к. мы рассматриваем пока именно такой случай). В то же время в тот момент, когда все ветви, соединяющие $V \backslash V^{+\infty}$ и $V^{+\infty}$, перекрыты, сумма притоков по всем узлам $V^{+\infty}$ =0. Поскольку притоки по всем узлам $V^{+\infty}$, кроме v, заданы, отсюда следует что $Q_{fix}(v) < Q_{max}(v)$.

Совершенно аналогично при $P(v) \to -\infty$ либо $Q(v) \to -\infty$, либо $Q(v)$ достигает минимального значения $Q_{min}(v)$, причем $Q_{fix}(v) > Q_{min}(v)$.

Как видим, в любом случае заданное значение $Q_{fix}(v)$ лежит внутри интервала значений $Q(v)$, когда $P(v)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, и в силу непрерывности зависимости $Q(v)$ от $P(v)$ достигается при некотором значении $P(v)$. Решение модифицированной КЗП при этом значении давления и даст решение исходной КЗП.

Рассмотрим теперь случай, когда есть связные подмножества $X \subset V_{cQ}$ с суммарным заданным притоком $Q(X) = 0$. Это случай вновь распадается на два – когда среди таких связных подмножеств с нулевым притоком есть терминальные, и когда их нет.

Рассмотрим сначала второй случай. В этом случае суммарные заданные притоки по всем терминальным подмножествам отличны от нуля и имеют «правильный» знак (сбалансированы по притокам). Идея заключается в том, чтобы немного «пошевелить» заданные притоки в узлах, перейдя к «хорошим» заданным условиям в узлах, при которых решение КЗП единственно и непрерывно, и получить решение исходной КЗП как предел решений «хороших» КЗП.

Уменьшим заданные притоки в узлах таким образом, чтобы суммарные потоки в тех подмножествах V_{cQ}, где суммарные притоки были =0, стали отрицательными, а знак суммарных притоков на других подмножествах не изменился. Так всегда можно сделать, например уменьшив притоки во всех узлах V_Q на $Q^+/(2N_Q)$, где Q^+ - минимальная абсолютная величина среди положительных суммарных притоков по всем подмножествам V_{cQ}. Пусть Q^1_{fix} – полученные таким образом заданные притоки в узлах. Рассмотрим на графе G КЗП с теми же заданными в узлах V_P давлениями и заданными притоками в узлах V_Q, равными $Q^\lambda_{fix} = \lambda Q_{fix} + (1-\lambda)Q^1_{fix}$, где параметр $\lambda \in [0,1)$. При этих условиях в «хорошие» условия для КЗП, уже рассмотренные выше, при которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных, в том числе от параметра λ. Более того, согласно теореме 3 давления P^λ_{var} в узлах V_Q не убывают с возрастанием λ. Покажем, что эти давления ограничены сверху. Для этого немного «пошевелим» притоки Q_{fix} в узлах V_Q, но теперь уже в сторону увеличения – добавим к ним $Q^-/(2N_Q)$, где Q^- - минимальная абсолютная величина среди отрицательных суммарных притоков по всем подмножествам V_{cQ}. Пусть Q^2_{fix} – полученные таким образом заданные притоки в узлах. Эти притоки вместе с заданными давлениями в узлах также дают «хорошие» условия для КЗП, решение существует и единственно, и при этом согласно теореме 2 $P^\lambda_{var} \le P^2_{var}$. Таким образом, давления P^λ_{var} не убывают и ограничены сверху – следовательно имеют предел при $\lambda \to 1$. Поскольку характеристики ветвей непрерывны, этот предел и дает решение исходной КЗП. При этом получившиеся узловые давления лежат между P^λ_{var} и P^2_{var}.

Заметим, можно было делать и наоборот – искать искомое решение, приближаясь к нужным притокам «сверху». При этом также получили бы решение исходной КЗП – но возможно иное (т.к. оно может быть не единственно!).

Осталось рассмотреть случай, когда в V_{cQ} есть терминальные подмножества с суммарным заданным нулевым притоком. Выберем среди таких терминальных подмножеств с нулевым суммарным данным притоком минимальное X_{min} (как показано в разделе 2, такое обязательно существует). Пусть G_{min} – подграф из всех узлов, содержащихся в компонентах X_{min}, и соединяющих их ветвей, а G_1 – подграф из не входящих в G_{min} узлов и соединяющих их ветвей. Если X_{min} изолировано, G_1 не соединено ветвями с G_{min}; если X_{min} – множество – сток, то все соединяющие эти подграфы ветви $\in E^+$ и направлены из G_1 в G_{min}, а если источник, то из G_{min} в G_1. Построим решение исходной КЗП, построив решения КЗП с теми же условиями в узлах отдельно на подграфах G_1 и G_{min} таким образом, чтобы все соединяющие их ветви были перекрыты.

Подграф G_1 удовлетворяет условиям теоремы и содержит меньше узлов с заданным притоком – следовательно по предположению индукции некоторое решение КЗП для него существует. Выберем некоторый узел v в графе G_{min}. Если решать для G_{min} модифицированную КЗП с данным в узле v давлением $P(v)$, то поскольку суммарный заданный приток на G_{min} =0, решение такой задачи совпадает на G_{min} с решением исходной. Подграф G_{min} с заданным в v давлением также удовлетворяет условию теоремы, и по предположению индукции решение такой КЗП существует. Если X_{min} изолировано, то достаточно выбрать любое давление $P(v)$, и совокупность решений на G_{min} и G_1 дадут решение исходной задачи.

В случае же, когда X_{min} – источник или сток, необходимо еще посмотреть, как ведут себя давления в узлах решений на G_{min} при $P(v) \to -\infty$ и при $P(v) \to +\infty$.

Рассмотрим V_{cQmin} – множество компонент, аналогичное V_{cQ}, но для G_{min} (с заданным давлением в узле v.

Пусть X_{min} – сток. Если в V_{cQmin} нет подмножества с нулевым суммарным заданным притоком, то условия КЗП «хорошие», решение существует, единственно, непрерывно по параметрам, при этом все узловые давления не убывают по $P(v)$. Более того, при $P(v) \to +\infty$ все узловые давление также $\to +\infty$ - иначе суммарный приток по собственному подмножеству узлов с давлениями $\to +\infty$ должен был бы при $P(v) \to +\infty$ либо $\to +\infty$ (что невозможно), либо быть равен 0 – что противоречит предположению. Теперь достаточно взять настолько большой $P(v)$, чтобы давления во всех узлах G_{min} были достаточно велики относительно давлений решения на G_1, чтобы все соединяющие G_1 и G_{min} ветви перекрылись.

Если же в V_{cQmin} есть подмножества с нулевым суммарным заданным притоком, то прибегнем еще раз к описанному ранее приему «исправления» заданных притоков в узлах – только теперь уже для КЗП на G_{min}. Найдем $P(v)$ достаточно большое, чтобы перекрывались все ветви между G_1 и G_{min} для решения на G_{min} с модифицированными притоками, а затем (той же процедурой с $\lambda \to 1$) найдем решение на G_{min} с исходными притоками и не меньшими узловыми давлениями.

Случай, когда X_{min} – источник, рассматривается аналогично, только подбирается достаточно малое $P(v)$ (при $P(v) \to -\infty$), а узловые притоки на G_{min} «подправляются» (если требуется) в сторону увеличения.

Теорема доказана.

Заметим, что из доказательства явно вытекает, что если V_{cQ} не содержит не сбалансированных терминальных связных подмножеств, но для хотя бы одного связного терминального $X \subset V_{cQ}$ $Q(X) = 0$, то решений КЗП бесконечно много.

О существовании решений КЗП в ограниченной области давлений

Как уже отмечалось, для практических целей важно существование решения КЗП в ограниченной области давлений, где задача имеет физический смысл.

Ниже приводятся две простых теоремы, вытекающие из установленных в предыдущих разделах результатов, устанавливающие такое существование - однако при условии, что характеристики ветвей определены (хотя бы математически) для любых значений давлений и удовлетворяют условиям А2 или А2+.

Теорема 5 (о существовании решения для промежуточных исходных данных).

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям А2 или А2+, на котором заданы 2 задачи КЗП (задача 1 и 2) с совпадающими непустыми множествами V_P и V_Q, и заданными давлениями $P_{fix}^{(1)}$ и $P_{fix}^{(2)}$ и заданными притоками $Q_{fix}^{(1)}$ и $Q_{fix}^{(2)}$, причем $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix}^{(2)}$, а $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ и $S^2(P^2,X^2,Q^2)$ – решения этих задач, E_0^{1+} и E_0^{2+} - подмножества ветвей E^+ с нулевыми расходами X^1 и X^2 соответственно («перекрытые» обратными клапанами ветви), G_0^{1+}и G_0^{2+} - графы, получающиеся из G выбрасыванием множеств ветвей E_0^{1+} и E_0^{2+} соответственно

Для любых P_{fix}, Q_{fix} таких что $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix} \le P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix} \le Q_{fix}^{(2)}$ также существует решение КЗП.

Если при этом G_0^{1+} и G_0^{2+} не содержат связных компонент без узлов из V_P, то $P_{var}^{(1)} \le P_{var} \le P_{var}^{(2)}$.

Доказательство теоремы 5

Поскольку решения $S^1(P^1,X^1,Q^1)$ и $S^2(P^2,X^2,Q^2)$ существуют, в V_{cQ} для их исходных данных все терминальные подмножества сбалансированы. Но тогда они сбалансированы и для промежуточных заданных притоков исходных данных, и согласно теореме 4 решение КЗП существует. Неравенство $P_{var}^{(1)} \le P_{var} \le P_{var}^{(2)}$ вытекает из теоремы 2.

Частный случай КЗП, в которой заданные притоки $Q_{fix} = 0$, будем называть задачей расчета пропускной способности (ЗРПС).

Теорема 6 (о существовании решения задачи ЗРПС для пассивных цепей)

Пусть G – граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям A2 или A2+, причем все ветви пассивные, и для него задана ЗРПС. Тогда существует решение данной задачи с $P_{var} \in [\min(P_{fix}), \max(P_{fix})]^{N_Q}$.

Доказательство теоремы 6.

Поскольку $Q_{fix} = 0$, в V_{cQ} все терминальные подмножества автоматически сбалансированы, поэтому согласно теореме 4 решение ЗРПС существует. Рассмотрим все узлы из V_Q в этом решении, у которых давление больше $\max(P_{fix})$. Все ветви, соединяющие эти узлы с остальными, должны быть перекрыты (либо таких ветвей вообще быть не должно) – иначе нарушится баланс притоков по этим узлам. Но тогда можно принять в этих узлах $P_{var} = \max(P_{fix})$, и это по-прежнему будет решением ЗРПС. Аналогично в узлах с давление меньше $\min(P_{fix})$ можно принять $P_{var} = \min(P_{fix})$. В результате получим решение ЗРПС, для которого $P_{var} \in [\min(P_{fix}), \max(P_{fix})]^{N_Q}$.

Литература

1. Корельштейн Л.Б. Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями. 2017. https://arxiv.org/abs/1708.07399.
2. Корельштейн Л.Б. Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями. В книге: Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня - 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018, с.55-83.
3. Корельштейн Л.Б. О гидравлических цепях с критическим течением. В книге: Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня - 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018, с.84-110.
4. Leonid Korelstein. Existence, uniqueness and monotonic behavior of the solution of classical flow distribution problem for hydraulic networks with pressure-dependent closure relations. E3S Web of Conferences. 2019, Vol. 102, 01004. Mathematical Models and Methods of the Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic Systems. Irkutsk, Russia, June 16-22, 2019.

5. Leonid Korelstein. Hydraulic networks with pressure-dependent closure relations, under restrictions on the value of nodal pressures. Maxwell matrix properties and monotonicity of flow distribution problem solution. E3S Web of Conferences. 2019, Vol. 102, 01005. Mathematical Models and Methods of the Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic Systems. Irkutsk, Russia, June 16-22, 2019.
6. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Приложение теории двойственности к задачам потокораспределения. Вычислительные технологии, 2009, т.14, №1, с.67-79.
7. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Задача потокораспределения в неклассической постановке. Сибирский журнал индустриальной математики, 2010, т.13, №4, с.15-24.
8. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Применение теории двойственности при моделировании гидравлических систем с регуляторами расхода. Известия ВУЗов. Математика. 2010, №9, с.76-81.
9. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Задача потокораспределения с нефиксированными расходами в узлах. Кибернетика и системный анализ. 2011, №1, с.81-92.
10. Михайловский Е.А. Численное решение задачи потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами при произвольных замыкающих соотношениях. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Математическое и компьютерное моделирование. Новосибирск, Наука, 2014. С.34-45.
11. Новицкий Н.Н., Михайловский Е.А. Модифицированный метод контурных расходов для расчета потокораспределения в гидравлических цепях при зависимых от давления законах течения. В сборнике: Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем. Труды XIV Всероссийского научного семинара. Иркутск, ИСЭМ СО РАН. 2014, с.57-66.
12. Михайловский Е.А., Новицкий Н.Н. Модифицированный метод узловых давлений для расчета потокораспределения в гидравлических цепях при нетрадиционных замыкающих соотношениях. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2015, №2(218), с.30-42.
13. Novitsky, Nikolay, and Egor Mikhailovsky. 2021. "Generalization of Methods for Calculating Steady-State Flow Distribution in Pipeline Networks for Non-Conventional Flow Models" *Mathematics,Vol.*9, N 8: 796. https://doi.org/10.3390/math9080796
14. Marc Vuffray, Sidhant Misra, Michael Chertkov. Monotonicity of Dissipative Flow Network Renders Robust Maximum Profit Problem Tractable: General Analysis and Application to Natural Gas Flow. https://arxiv.org/abs/1504.02370
15. Garrett Birkhoff, Bruce Kellogg. Solution of Equilibrium Equations in Thermal Networks. Proc. Of Symp. on Generalized Networks, Vol.16, pp.443-452. Published for Polyt. Inst. Brooklyn, N.Y. (1966)

16. Werner C. Rheinboldt. On M-Functions and Their Application to Nonlinear Gauss-Seidel Iterations and to Network Flows. J. of Math. Analysis and applications. Vol.32, No.2, pp.274-307 (1970).
17. K. Jittorntrum. An Implicit Function Theorem. Journal of optimization theory and applications. 1978, Vol.25, No.4, pp.575-577.
18. S. Kumagai. An Implicit Function Theorem: Comment. Journal of optimization theory and applications. 1980, Vol.31, No.2, pp.285-288.