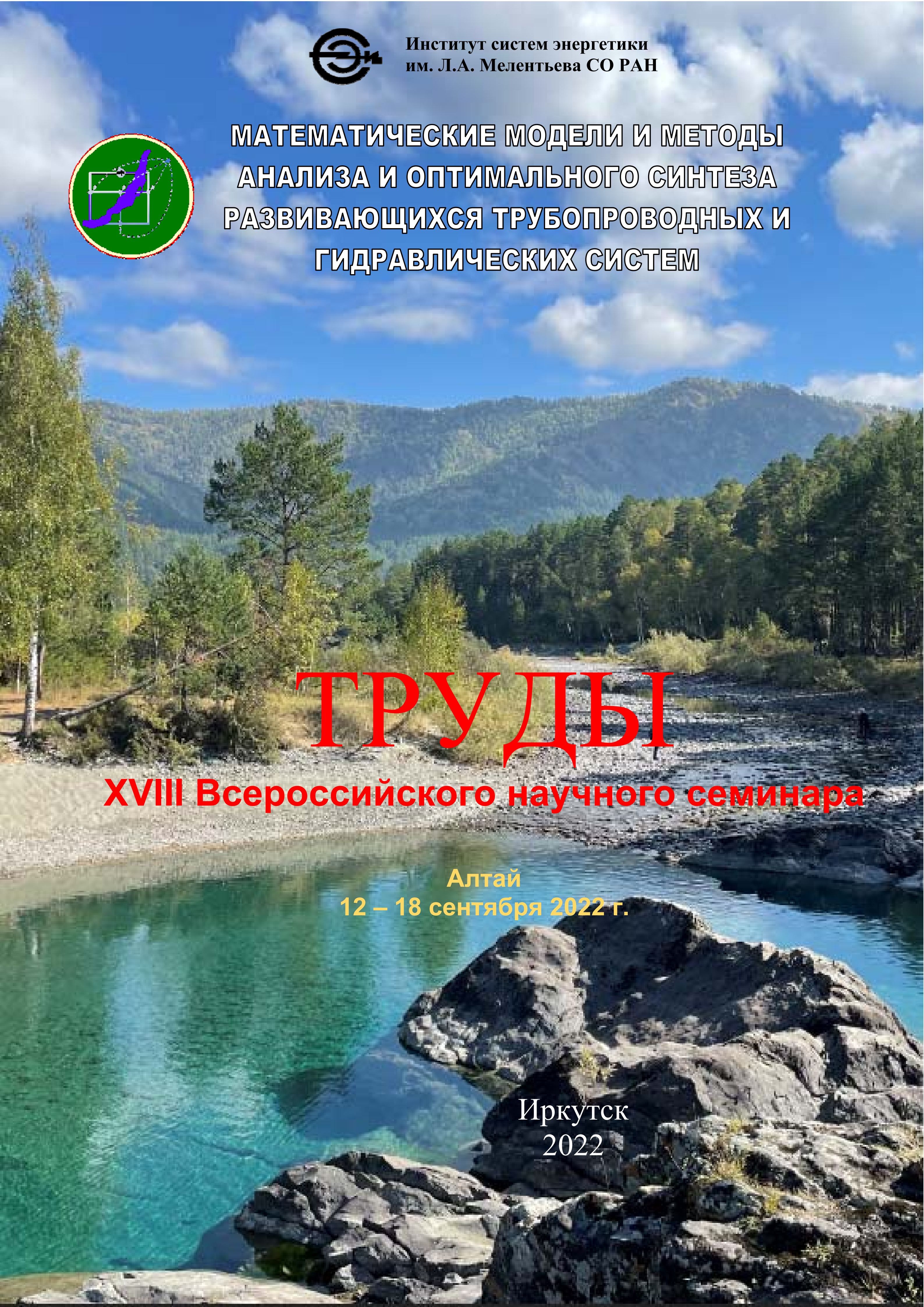

Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ

XVIII Всероссийского научного семинара

Алтай
12 – 18 сентября 2022 г.

Иркутск
2022

ФГБУН Институт Систем Энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН

XVIII Всероссийский научный семинар

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Труды семинара

12 – 18 сентября 2022 г.

Алтай

Иркутск
2022

УДК 519.6+519.8

Труды XVIII Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Алтай, 12 – 18 сентября 2022 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2022. – 477 с.

ISBN 978-5-93908-155-9.

В сборнике научных трудов обсуждаются актуальные проблемы математического моделирования трубопроводных систем (ТПС) энергетики – тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения, а также развития методов теории гидравлических цепей, имеющих межотраслевое значение.

Сборник предназначен для сотрудников научно-исследовательских, проектных и производственных организаций, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Ответственный за выпуск: к.т.н. Токарев Вячеслав Вадимович

Без объявления.

ISBN 978-5-93908-155-9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВЕТВЕЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ЭНДОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОДУКТА

Корельштейн Л.Б.

(ООО «НТП Трубопровод», г. Москва)

В данной статье содержится краткий анонс результатов о существовании и единственности решения классической задачи потокораспределения (КЗП) в гидравлических цепях с характеристиками, зависящими от эндогенных свойств продукта, таких как температура и состав, которые удалось получить автору к моменту написания данной статьи. Формулируются некоторые условиях на характеристики ветвей и топологию цепи, при которых решение КЗП существует и единственно.

Постановка задачи

На практике часто необходимо решать классическую задачу потокораспределения (КЗП) с характеристиками продукта, зависящими от эндогенных параметров, таких как термодинамические параметры (температура, энтальпия) и/или состав. Данная задача рассматривалась, в частности, в работах [1, 2]. При этом характеристики ветвей становятся зависящими от эндогенных параметров, и тем самым задача становится сцепленной.

Математически задача описывается следующим образом. Пусть G - ориентированный связный граф с N_V узлами (образующими множество узлов V) и N_E ветвями (образующими множество ветвей E). КЗП описывается известными уравнениями теории гидравлических цепей

$$A^T P = F(X, \theta) \tag{1}$$

$$AX = Q \tag{2}$$

Где

- A – матрица соединений узлов и ветвей,
- X – вектор массовых расходов по ветвям,
- Q – вектор внешних массовых притоков и отборов в узлах,
- P – вектор узловых потенциалов (давлений),
- θ – конечномерный вектор эндогенных параметров на ветвях
- $F(X, \theta)$ – непрерывная вектор-функция, каждый элемент которой является функцией потерь потенциала на ветвях в зависимости от расхода и эндогенных параметров. Тем самым на каждой ветви расход вычисляется по обратной функции

$$X_i = \varphi_i(P_{Fi}, P_{Li}, \theta_{Fi}) \tag{3}$$

Тем самым мы рассматриваем обобщенную задачу, когда характеристики ветвей зависят и от величины узловых потенциалов (а не только их разности), и от эндогенных параметров на ветви.

Будем считать, что эндогенные параметры в узлах удовлетворяют так называемым условиям идеального смешения

$$A_F X\theta_{mix} + A_L X\theta_L = Q^+\theta_{in} + Q^-\theta_{mix} \quad (4)$$

$$\theta_F = A_F^T\theta_{mix} \quad (5)$$

$$\theta_L = \mathrm{h}(\theta_F, X) \quad (6)$$

Где

- $Q^+ \geq 0,\ Q^- \leq 0,\ \mathrm{Q} = Q^+ + Q^-$ - вектора притоков и оттоков в узлах
- $A_F \geq 0, A_L \leq 0,\ A = A_F + A_L$ - матрицы соединений начала и конца ветвей
- θ_F- эндогенные параметры в начале ветвей (по ходу положительного потока)
- θ_L- эндогенные параметры в конце ветвей
- θ_{mix}- эндогенные параметры после смешения в узле
- θ_{in}- эндогенные параметры притоков в узлах (должны быть заданы для всех узлов, так как знаки расходов и притоков заранее неизвестны и могут меняться!)
- $\mathrm{h}(\theta_F, X)$ - непрерывная вектор-функция параметров в конце ветвей от параметров вначале и расходов.

В качестве области допустимых значений θ естественно рассматривать некоторое выпуклое множество, включающее выпуклую оболочку θ_{in}.

Важным и распространенным частным случаем является случай постоянных эндогенных параметров на ветвях ($\theta_L = \mathrm{h}(\theta_F, X) = \theta_F$), когда взаимодействие с окружающей средой продукта по данному параметру отсутствует или им можно пренебречь. Например, содержание компонент в составе продукта не меняется на ветви (если нет утечек или притоков через трубу), температура не меняется при изотермическом течении, полная энтальпия не меняется для адиабатического течения (хорошо изолированные трубы). Будем в этом случае говорить, что ветви «без потерь по θ», в противном случае – «с потерями по θ».

В [3-5] сформулированы требования на зависящие от узловых потенциалов характеристики ветвей, обеспечивающие существование и единственность КЗП (без учета влияния эндогенных параметров). Множество допустимых характеристик $\tilde{Z}_a^2$ определяется условиями

1) $\varphi(P_F, P_L)$ является непрерывной функцией двух переменных P_F, P_L;
2) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F строго убывает по P_L;
3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L строго возрастает по P_F;
4) $\varphi(P_F, P_L)$ определена на всем $\mathbb{R}^2$.
5) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_L \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_L \to -\infty$

6) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_F \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_F \to -\infty$

В нашем случае характеристики дополнительно непрерывно зависят от вектора эндогенных параметров задачи. Возникает вопрос – какие надо наложить требования в этом случае на характеристики ветвей, чтобы обеспечить существование и единственность решения КЗП.

На практике сцепленную задачу КЗП решают методом двойных циклов итераций (фиксируя вектор θ_F, решая КЗП одним из классических методов и затем пересчитывая θ_F по полученным расходам на ветвях [2]. Возможно также использовать пересчет эндогенных параметров между итерациями внутреннего цикла (метода решения КЗП). При этом чаще всего такой расчет быстро сходится. Однако уже давно известно из практики, что в некоторых случаях подобные итерации не сходятся или могут сходиться к разным решениям. Более того, известно, что сцепленная задача КЗП в некоторых случаях может иметь несколько решений или не иметь их вообще! Поэтому условия существования и единственности решения в данной задаче имеют прямую практическую значимость.

Список проблемных ситуаций

На основе практического опыта можно сформулировать следующий список из трех проблемных ситуаций, когда решение рассматриваемой задачи может быть не единственно или вообще не существовать

- Активные ветви (насосы, перепад высот), напор при нулевом расходе которых зависит от параметров θ
- Близкие к нулевым или нулевые расходы для задачи потерями по θ
- Потери потенциала на ветви <u>сильно</u> зависят от параметров θ

В каждом из этих случаев известны примеры не единственности решения, а в первом случае оно может не существовать вовсе.

В первой и второй ситуации проблема связана с неадекватностью математической модели, которая не учитывает механизмы массообмена и теплопередачи вдоль трубы в неподвижном продукте.

Третий случай более интересный, различные решения КЗП действительно могут физически реализоваться (хотя видимо не все они будут устойчивыми).

Возникает 2 вопроса:

1) Исчерпывающий ли это список?
2) Что такое «сильная» зависимость характеристики ветви от θ, как это выразить математически?

Ответ на первый вопрос автору пока неизвестен. Частичный ответ на второй вопрос формулируется далее в статье.

Условия на характеристики ветвей

Исходя из вышесказанного, наложим на пассивные ветви без потерь по θ условие, что они удовлетворяют условиям 1)-6) для каждого заданного значения θ.

Для ветвей с потерями по θ имеет смысл рассматривать только случай, когда направление потока в ветви не меняется. На них накладываем только условия 1)-3) и условия 5), 6) в части стремления расхода к $+\infty$.

Теоремы существования решения

Оказывается, что можно достаточно просто установить следующие теоремы существования решения КЗП в данной задаче.

Теорема о существовании решения для цепей без смены направления потока

Пусть $\theta \epsilon K^{N_E}$, где K – конечномерный выпуклый компакт, и пусть для любого заданного $\theta_F \epsilon K^{N_E}$ имеем $\theta_L = \mathrm{h}(\theta_F, X) \epsilon K^{N_E}$, а для решения соответствующей КЗП с фиксированными θ_F (которое существует – и в силу монотонности характеристик ветвей единственно) $X > 0$. Тогда решение сцепленной КЗП существует.

Доказательство.

Определим отображение $\Upsilon : K^{N_E} \to K^{N_E}$ следующим образом: Для любого θ_F решим соответствующую КЗП, посчитаем θ_L и затем новое значение $\theta_F' = \Upsilon(\theta_F)$ из правил смешения. Из теоремы Брауэра о непрерывности области (см. [3, 4]) и непрерывности $\mathrm{h}(\theta_F, X)$ следует непрерывность отображения Υ, которое отображает конечномерный выпуклый компакт в себя. По теореме Брауэра это отображение имеет неподвижную точку – которая и соответствует решению исходной КЗП.

Теорема о существовании решения для цепей с пассивными ветвями без потерь по θ.

Пусть $\theta \epsilon K^{N_E}$, где K – конечномерный выпуклый компакт. Тогда решение КЗП для цепи с пассивными ветвями без потерь по θ существует.

Доказательство.

Определим многозначное отображение $\Psi : K^{N_E} \to K^{N_E}$ следующим образом: Для $\theta \epsilon K^{N_E}$ решим задачу КЗП, найдем X, и определим $\Psi(\theta)$ как результат расчета по правилам смешения для ветвей с ненулевым расходом, и как K для ветвей с нулевым расходом. Можно показать, что Ψ удовлетворяет условия теоремы Какутани о неподвижной точке многозначных отображений, и следовательно имеет неподвижную точку, которая и соответствует искомому решению.

Монотонность при подмесе и единственность решения

Оказывается, что для обеспечения единственности решения важную роль играет соблюдение следующего условия на характеристики ветвей (без потерь по θ).

Пусть есть ветвь с расходом X и эндогенными параметрами θ. Добавим («подмешаем») к ней ненулевой дополнительный расход X' того же знака с эндогенными параметрами θ', так что в итоге получим расход по ветви $X + X'$ с эндогенными параметрами $(X\theta + X'\theta')/(X + X')$. Если при этом при любых X, X', θ, θ' потери на ветви при такой операции строго возрастают (для ветви с характеристикой, зависящей от узловых потенциалов – как при фиксированном начальном, так и при фиксированном конечном потенциалах), будем говорить, что ветвь сохраняет монотонность (или просто монотонна) при подмесе. Очевидно, данное условия обобщает условия монотонности 2) и 3) для ветвей и отражает факт более слабой зависимости потерь от эндогенных параметров по сравнению с зависимостью от расхода. Заметим, что для активных ветвей это условие сразу влечет также независимость напора от θ при нулевом расходе.

Оказывается, что если монотонность при подмесе для ветви не соблюдается, то с такой ветвью легко построить простую цепь, для которой решение КЗП с эндогенными параметрами будет неединственным.

Означает ли это, что для любой цепи, состоящей из ветвей, сохраняющих монотонность при подмесе, решение будет единственно? На момент написания статьи это автору точно неизвестно. Однако для важного класса задач это именно так, и тесно связано с понятием «спектра потоков», введенным Н.Н. Новицким в работе [1].

Пусть рассматриваемая цепь состоит из ветвей без потерь по эндогенным параметрам и всегда представляет собой открытую систему. Тогда согласно [1] потоки по всем ветвям однозначно представляются в виде суммы расходов из разных источников – а эндогенные параметры на ветвях являются соответствующей линейной комбинацией θ_{in} с коэффициентами, соответствующими долям расходов источников в общем расходе по ветви.

Пусть имеется 2 потокораспределения, удовлетворяющих уравнениям (2) в узлах с заданным притоком. Будем говорить, что задача обладает «свойством монотонного пути для спектров» (сокращенно MPS-свойством), если для любых таких различных потокораспределений всегда найдется путь между двумя узлами из V_P, для всех ветвей которого (с учетом направления ветвей) не просто величина расхода, а **все** компоненты спектра потоков одного >= спектра потоков другого, и при этом хотя бы на одной ветви спектры не совпадают.

Данным свойством обладают не все задачи и графы. **Однако для всех задач, у которых граф является деревом, MPS-свойство выполняется!** (доказывается индукцией по числу ветвей дерева).

Заметим теперь, что если один спектр потока на ветви строго больше другого, это означает, что больший расход получается подмесом с параметрами из выпуклой оболочки θ_{in}. Отсюда легко получаем, что для задач, у которых ветви сохраняют монотонность по подмесу и выполнено MPS – свойство, решение КЗП с эндогенными параметрами единственно. В самом деле, если бы оно было не единственно, то у двух различных решений отличались бы потокораспределения – а тогда у соответствующего монотонного пути для спектров потоков этих двух решений должна была бы быть различная разность узловых потенциалов на концах пути – что невозможно, так как в этих узлах потенциалы заданы.

В частности, решение КЗП с эндогенными параметрами для любых графов, представляющих собой дерево с сохраняющими монотонность при подмесе ветвями, единственно.

В заключение заметим, что свойство монотонности при подмесе определенным образом связано с известным законом монотонности Рэлея для сетей. Рассмотрим гидравлическую цепь, составленную из «классических» (с характеристиками, не зависящими от величины узловых потенциалов) монотонных по подмесу ветвей, с единственным притоком и единственным стоком. Сохраняет ли такая цепь в целом монотонность при подмесе? Оказывается, что если для такой цепи выполняется закон монотонности Рэлея, то сохраняется и монотонность при подмесе. Поскольку известно, что для однородных сетей (например, полностью линейных, либо полностью квадратичных) монотонность Рэлея справедлива, то для таких сетей сохранится и монотонность по подмесу.

Литература

1. Новицкий Н.Н. Математические модели и методы анализа спектра потоков в гидравлических цепях. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Новосибирск, «Наука», 2008. с.89-103.

2. Корельштейн Л.Б., Пашенкова Е.С. Опыт использования методов глобального градиента и декомпозиции при расчете установившегося неизотермического течения жидкостей и газов в трубопроводах. В книге: Трубопроводные системы энергетики. Математическое моделирование и оптимизация. Новосибирск, «Наука», 2010, с.103-114.

3. Корельштейн Л.Б. Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями. В книге: Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня - 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018, с.55-83.

4. Leonid Korelstein. Existence, uniqueness and monotonic behavior of the solution of classical flow distribution problem for hydraulic networks with pressure-dependent closure relations. E3S Web of Conferences. 2019, Vol. 102, 01004. Mathematical Models and Methods of the Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic Systems. Irkutsk, Russia, June 16-22, 2019.

5. Leonid Korelstein. Hydraulic networks with pressure-dependent closure relations, under restrictions on the value of nodal pressures. Maxwell matrix properties and monotonicity of flow distribution problem solution. E3S Web of Conferences. 2019, Vol. 102, 01005. Mathematical Models and Methods of the Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic Systems. Irkutsk, Russia, June 16-22, 2019.