РАСЧЕТ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ КОНИЧЕСКИХ ОБЕЧАЕК И ПЕРЕХОДОВ

Корельштейн Л. Б., ООО «НТП Трубопровод»

В серии предыдущих статей автора в ТПА [1–3] обсуждалась важность правильного и точного расчета полной и смачиваемой поверхности аппаратов – в частности, для корректного определения тепловых потоков и расчета систем аварийного сброса. При этом были заполнены те пробелы, которые существовали по данному вопросу, и предложены инженерные формулы для расчета смачиваемой поверхности полуэллиптических, выпуклых и торосферических днищ горизонтальных аппаратов. В данной статье заполняется еще один такой пробел, связанный с расчетом площади поверхности эксцентрических конических обечаек и переходов.

Эксцентрические конические обечайки и переходы являются хотя и не самым частым, но неотъемлемым элементом технологических аппаратов и трубопроводов. В частности, эксцентрические конические обечайки используются в конструкции ребойлеров (рис.1), а эксцентрические переходы – на всасывающем трубопроводе перед насосами (рис. 2).

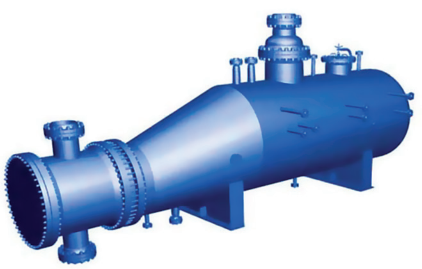

Рисунок 1 – Ребойлер производства НПО Спецнефтемаш

Рисунок 2 – Эксцентрический переход по ГОСТ 17378-2001

При этом, если расчет объема продукта в усеченном эксцентрическом конусе не вызывает трудностей и рассчитывается по той же формуле, что и для правильного конуса, то относительно его площади поверхности до сих пор в инженерной среде циркулируют разные мнения – хотя, казалось бы, с математической точки зрения этот расчет изучался еще Лежандром 200 лет назад! (Обзор публикаций на эту тему можно найти в относительной недавней статье [4]). Вопрос заключается в том, можно ли и для расчета площади такого конуса использовать ту же формулу, что для концентрического конуса? Как мы увидим – для точного расчета нельзя (это грубая математическая ошибка) – но с определенными поправками в пределах инженерной точности все же можно!

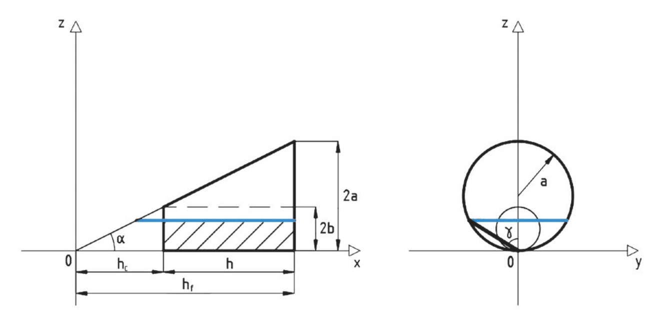

Рисунок 3 – Параметры эксцентрического конуса

Рассмотрим усеченный конус с радиусами днищ *a* и *b* $(a > b)$ и высотой *h* (рис. 3), расположенный горизонтально «прямой» стороной вниз (в случае расположения «прямой» стороной вверх смоченная и сухая площади поверхностей просто поменяются местами).

Дополним усеченный конус до полного, выведем соответствующие формулы сначала для полного конуса, а затем для усеченного. Высоты полного конуса и усеченной конической части h_f и h_c рассчитываются по формулам:

$$h_f = h\,a / (a-b),\quad h_c = h\,b / (a-b). \qquad (1)$$

При этом поверхность полного конуса описывается уравнением:

$$y^2 + (z - x / h_f\,a)^2 = a^2 (x / h_f)^2. \qquad (2)$$

А угол раствора конуса $\alpha = \arctan(2(a-b)/h) = \arctan(2a/h_f) = \arctan(2b/h_c)$.

Расчет площади полной боковой поверхности конуса

Как известно [5], площадь поверхности может быт рассчитана по формуле:

$$A_f = \iint \sqrt{(1 + (\partial x / \partial y)^2 + (\partial x / \partial z)^2)}\, dydz. \qquad (3)$$

Где интегрирование ведется по проекции поверхности конуса на плоскость *yz*.

При этом из уравнения (2) легко получить, что:

$$\sqrt{(1 + (\partial x / \partial y)^2 + (\partial x / \partial z)^2)} = \sqrt{(1 + h_f^2 / (4a^2)\,(1 + y^2 / z^2)^2)}. \qquad (4)$$

Для дальнейших преобразований оказывается удобным перейти к системе полярных координат r, φ, x, так что $z = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В этих координатах поверхность конуса описывается условиями: $r = x\tan\alpha\cos\varphi$, где $0 \le x \le h_f$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, а $\sqrt{(1 + h_f^2/(4a^2)\,(1 + y^2/z^2)^2)} = \tan(\alpha)^{-1} \cos(\varphi)^{-2} \sqrt{(1 + \tan(\alpha)^2 (\cos\varphi)^4)}$.

В результате формула (3) после перехода к полярным координатам, подстановки, интегрирования по r и упрощений примет вид:

$$A_f = 2h_f\,a \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2 (\cos\varphi)^4)}\, d\varphi. \qquad (5)$$

Известно [6], что интеграл в (5) представляет собой так называемый «эллиптический» интеграл и не выражается через элементарные функции, а может быть записан через комбинацию полных эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го рода (причем присутствуют все три – см. [4]). Это, однако, не особенно полезно с точки зрения практических инженерных вычислений.

Оказывается, однако, что данный интеграл обладает замечательным свойством: он из-за поведения функции под интегралом может быть очень точно вычислен по простейшим формулам трапеций при практически всех значениях угла раствора конуса *α*. Применяя формулы трапеций с одной или с 2-мя внутренними точками (то есть со значениями угла интегрирования *φ*, равными $0, \pi/4, \pi/2$ или $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$), выражение для площади примет вид, аналогичный формуле площади поверхности концентрического конуса:

$$A_f \approx \pi a L_f. \qquad (6)$$

Где «средняя» длина образующей L_f рассчитывается по формулам:

$$L_f = (h_f + 2\sqrt{(h_f^2 + a^2)} + \sqrt{(h_f^2 + 4a^2)}) / 4 \text{ или}$$
$$L_f = (h_f + 2\sqrt{(h_f^2 + a^2/4)} + 2\sqrt{(h_f^2 + (9a^2)/4)} + \sqrt{(h_f^2 + 4a^2)}) / 6. \qquad (7)$$

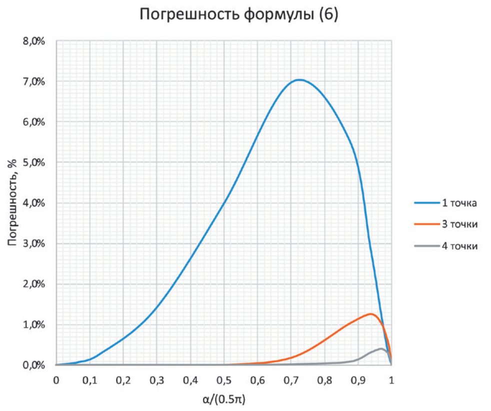

Рисунок 4 – Погрешность формулы расчета площади

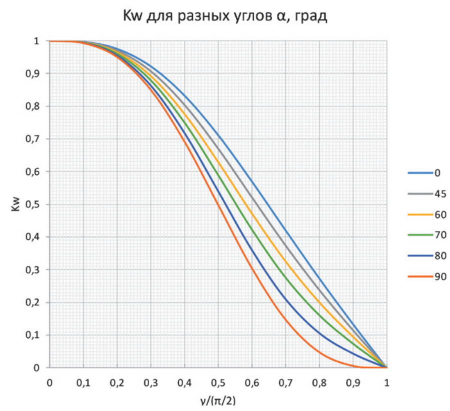

Рисунок 5 – Доля смоченной поверхности

На рис .4 показана погрешность формулы (6) при расчете L_f по трем и четырем точкам в сравнении с расчетом по 1 точке – т. е. для $L_f = \sqrt{(h_f^2 + a^2)}$, когда формула (6) точно совпадает с формулой для концентрического конуса.

Как видно, при расчете просто по формуле концентрического конуса погрешность может составлять до 7 %. Однако если считать L_f как среднее по формулам (7), формула (6) очень точна и дает небольшую погрешность лишь для очень больших (около 85°) углов раствора конуса, не характерных для применяемых на практике обечаек и переходов.

Для полной боковой площади усеченного конуса с учетом подобия легко получить аналогичную формулу:

$$A \approx \pi\,(a + b)\,L, \tag{8}$$

где:

$$L = (h + 2\sqrt{(h^2 + (a-b)^2)} + \sqrt{(h^2 + 4\,(a-b)^2)})\,/\,4. \tag{9}$$

Или

$$L = (h + 2\sqrt{(h^2 + (a-b)^2/4)} + 2\sqrt{(h^2 + (9\,(a-b)^2)/4)} + \sqrt{(h^2 + 4\,(a-b)^2)})\,/\,6. \tag{10}$$

Расчет площади смоченной и сухой боковой поверхности конуса

Пусть уровень жидкости равен z_l. Как рассчитать площади смоченной и сухой поверхности?

Сначала сделаем это для полного конуса.

Введем угол $\gamma = \arccos\sqrt{z_l/2a} = \pi/4 - ½\arcsin(z_l/a - 1)$.

Рассуждая точно так же, как выше, придем к следующим формулам для площади смоченной и сухой поверхностей

$$A_{fw}(z_l) = 2h_f a\,(I_{w1} + I_{w2}),\quad I_{w1} = \int_0^{\gamma} [\cos\gamma/\cos\varphi]^4 \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)}\,d\varphi,\quad I_{w2} = \int_{\gamma}^{(\pi/2)} \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)}\,d\varphi. \tag{11}$$

$$A_{fd}(z_l) = 2h_f a_{d1},\ I_{d1} = \int_0^{\gamma} \{1 - [\cos\gamma/\cos\varphi]^4\}\sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)}\,d\varphi. \tag{12}$$

При этом $\sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)} = 1 + [\sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)} - 1] = 1 + ((\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)/(1 + \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)})$, и (12) можно представить в виде (проинтегрировав 1-е слагаемое [7]).

$$A_{fd}(z_l) = 2h_f\,a\,[\gamma - \tfrac{1}{3}\sin(2\gamma) - \tfrac{1}{12}\sin(4\gamma) + (\tan\alpha)^2 I_{d2}]. \tag{13}$$

Где:

$$I_{d2} = \int_0^{\gamma} ((\cos\varphi)^4 - (\cos\gamma)^4)\,/\,(1 + \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)})\,d\varphi. \tag{14}$$

Оказывается, характер функции под интегралом в (14) таков, что он достаточно точно вычисляется по квадратурной формуле Симпсона с точками $0,\ 0{,}25\,\gamma,\ 0{,}5\,\gamma,\ 0{,}75\,\gamma,\ \gamma$. С учетом того, что при $\varphi = \gamma$ функция под интегралом равна нулю, получаем:

$$A_{fd}(z_l) \approx 2h_f a\,\{(\gamma - 1/3\sin(2\gamma) - \tfrac{1}{12}\sin(4\gamma) + (\tan\alpha)^2\,\gamma/12\,[f_d(0) + 4f_d(0{,}25\,\gamma) + 2f_d(0{,}5\,\gamma) + 4f_d(0{,}75\,\gamma)])\}. \tag{15}$$

Где $f_d(\varphi) = ((\cos\varphi)^4 - (\cos\gamma)^4)\,/\,(1 + \sqrt{(1 + (\tan\alpha)^2(\cos\varphi)^4)})$.

Формула (15) обеспечивает точность расчета $A_{fd}(z_l)$ с погрешностью в десятые доли процента, а при небольших значениях угла раствора конуса α (до 45 градусов) – сотые доли процента.

При малых углах α:

$$A_{fd}(z_l) \approx 2h_f a\,\{(\gamma - \tfrac{1}{3}\sin(2\gamma) - \tfrac{1}{12}\sin(4\gamma) + (\tan\alpha)^2\,[[3/16 - ½(\cos\gamma)^4]\,\gamma + \tfrac{1}{8}\sin(2\gamma) + \tfrac{1}{64}\sin(4\gamma)]]\}. \tag{16}$$

С инженерной тоски зрения площади смоченной и сухой поверхности удобно также представить через доли от полной поверхности:

$$A_{fd}(z,\alpha) = A_f(\alpha)\,K_d(\gamma,\alpha),\ A_{fw}(z,\alpha) = A_f(\alpha)\,K_w(\gamma,\alpha),\ K_w + K_d = 1. \tag{17}$$

На рис. 5 показана номограмма для коэффициента K_w.

Значение K_w находится между 2-мя предельными граничными кривыми – для $\alpha = 0$:

$$K_w = 2/\pi\,[\pi/2 - \gamma + \tfrac{1}{3}\sin(2\gamma) + \tfrac{1}{12}\sin(4\gamma)]. \tag{18}$$

И для $\alpha = \pi/2$:

$$K_w = 2/\pi\,[\pi/2 - \gamma + \tfrac{1}{4}\sin(4\gamma)]. \tag{19}$$

При этом (18) дает верхнюю границу коэффициента K_w.

Для усеченного конуса смоченную поверхность можно посчитать как разность смоченных поверхностей полного конуса и отсеченной части:

$$A_w(z_l) = A_{wf}(z_l) - A_{wc}(z_l). \tag{20}$$

Где $A_{wc}(z_l)$ считается по тем же формулам, что $A_{wf}(z_l)$ (только с подстановкой параметров для усеченной части конуса), а при $z_l \geq 2b$ $A_{wc}(z_l) = A_c$.

Автор благодарит Николая Максименко за помощь в оформлении статьи.

Москва, декабрь 2024 года

Список литературы:

1. *Корельштейн Л. Б. Формула расчета смачиваемой поверхности эллиптического днища // Трубопроводная арматура и оборудование. – 2018. – № 1 (94). – С. 64–65.*
2. *Корельштейн Л.Б. Расчет смачиваемой поверхности выпуклых и торосферических днищ горизонтальных аппаратов // Трубопроводная арматура и оборудование. – 2018. – № 2 (95). – С. 82.*
3. *Корельштейн Л. Б. Еще раз о расчете смачиваемой поверхности выпуклых днищ горизонтальных аппаратов // Трубопроводная арматура и оборудование. – 2019. – № 2 (101). – С. 62.*
4. *Steven R. Fitch. Oblique Circular Cones and Cylinders // arXiv:1212.5946v2 [math.MG]. – 31 Dec 2012. – 16 p.*
5. *Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. - М., Наука, 1978. – 832 с.*
6. *Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. Изд. 2-е, испр. – М.: КомКнига, 2006 – 368 с.*
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. – 2-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.*