ФОРМУЛА РАСЧЕТА СМАЧИВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДНИЩА

Корельштейн Л. Б., ООО «НТП Трубопровод», Москва

При разнообразных технологических и прочностных расчетах аппаратов в качестве исходных параметров обычно необходимо определять базовые геометрические величины – объемы и поверхности. В частности, при решении задач расчета аварийного сброса среды из аппарата с находящейся в нем жидкостью такими базовыми величинами являются объем жидкости и площадь смачиваемой поверхности аппарата (поверхности контакта стенок аппарата с жидкостью) в зависимости от уровня налитой жидкости. Площадь смачиваемой поверхности особенно важна, поскольку именно она является площадью теплообмена между продуктом и окружающей средой в случае пожара или иных аварийных ситуаций. Естественно, эти величины рассчитываются как сумма соответствующих объемов или площадей для каждого из элементов (цилиндрических и конических обечаек, днищ различного вида), составляющих аппарат.

На первый взгляд, задачи расчета объемов и площадей стандартных геометрических форм относятся к базовым вопросам математики и инженерного дела и должны были быть изучены «вдоль и поперек» столетия назад. Однако, к удивлению автора, оказалось, что и тут в инженерной практике есть пробелы и неточности, причем не в каких-то экзотических ситуациях – а в одном из самых типичных случаев – горизонтальной емкости с эллиптическими боковыми днищами!

Для большинства сочетаний геометрических форм и расположений элементов аппаратов все объемы и площади рассчитываются точно по аналитическим формулам – их обзор можно найти, например, в [1, 2]. Однако как раз для площади поверхности сегмента эллиптического днища (то есть сжатого сфероида) возникает проблема – в общем случае соответствующий интеграл не может быть точно выражен через элементарные функции.

Вопрос о расчете площади поверхности и других характеристик эллипсоида общего вида относится к классике математики. Основополагающие результаты в этом направлении были получены еще в XVIII веке Лежандром (через так называемые эллиптические интегралы). Исследования в этом направлении продолжаются и сегодня, обзор и последние результаты можно прочитать в работах [3, 4, 5, 6]. В частности, для площади поверхности произвольного сегмента эллипсоида в [3, 4] выведены различные варианты выражений через однократные интегралы, которые не удается проинтегрировать аналитически и рекомендуется рассчитывать методами численного интегрирования.

Для более частного случая осесимметричного эллипсоида (сплюснутого сфероида) разумно рассчитывать, что соответствующие интегралы для площади поверхности сегмента должны вычисляться аналитически – если не точно, то хотя бы приближенно, тем более что точное выражение для всей площади сфероида известно. И такая формула была предложена в работе Doane [7] и получила популярность, так как ее легко использовать в инженерных вычислениях. Она же была заложена и в такую уважаемую в мире программу расчета систем аварийного сброса, как SuperChems. Хотя из работы Doane [7] оставалось неясным, как ее автор получил данную формулу, сомневаться в ее применимости, казалось бы, не было оснований – для полностью заполненного и наполовину заполненного аппарата формула Doane дает точные значения, а по структуре сходна с легко получаемой точной формулой для эллиптического днища вертикального аппарата.

Поэтому для автора оказалась сюрпризом дискуссия в специализированных форумах [8], в которой специалисты ставили применимость формулы Doane под сомнение. И как выяснилось, для таких утверждений были основания!

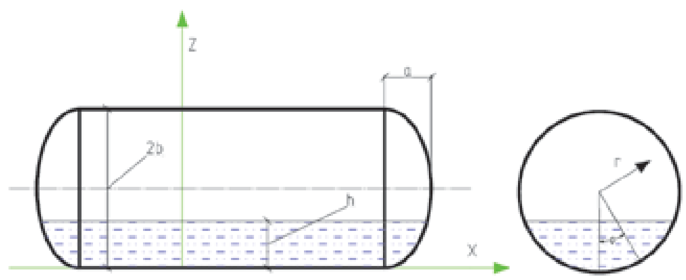

Рисунок 1

Рассмотрим горизонтальную емкость с цилиндрической обечайкой диаметром $2b$ и боковыми эллиптическими днищами с полуосями a и b (рисунок 1). Требуется определить площадь смачиваемой поверхности днища $A_w(h)$ в зависимости от уровня h налитой жидкости. Обозначим через $2b = \sqrt{(1-(a/b)^2}$ эксцентриситет днища. Для наиболее типичных днищ с соотношением полуосей 2:1 эксцентриситет $e = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866$.

Поверхность днища описывается уравнением:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + (z-b)^2/b^2 = 1, \qquad (1)$$

где ось x направлена вдоль аппарата.

Для полностью или наполовину заполненного аппарата имеет место известная формула поверхности сплющенного сфероида:

$$A_w(2b) = 2A_w(b) = \pi b^2\left[1+\frac{1-e^2}{2e}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right] = \pi b^2\left[1+\frac{1-e^2}{e}\operatorname{arctanh}(e)\right] \qquad (2)$$

Введем безразмерные величины уровня жидкости $H = h/b$ и $F = H/2 = h/2b$.

Формула Doane [7] предложена только для стандартного днища (с $e = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866$) и имеет вид:

$$A_w(h) = \frac{\pi}{2} b^2\left\{(F-0{,}5)\sqrt{1+12(F-0{,}5)^2} + 1 + \frac{1}{4e}\ln\left[\frac{(4e(F-0{,}5)+\sqrt{1+12(F-0{,}5)^2}}{2-\sqrt{3}}\right]\right\} \qquad (3)$$

Попробуем рассчитать $A_W(h)$ в общем случае и сравнить результаты.

Как известно, площадь поверхности находится по формуле:

$$A_w(h) = \iint \sqrt{1+(\partial x/\partial y)^2 + (\partial x/\partial z)^2}\, dydz, \qquad (4)$$

где интегрирование в данном случае ведется по области сегмента круга, заданного неравенствами $0 \le z \le h$, $y^2/b^2 + (z-b)^2/b^2 \le 1$.

Уравнение (4) в сочетании с (1) дает:

$$A_w(h) = \iint \frac{\sqrt{1-e^2(y^2/b^2 + (z-b)^2/b^2)}}{\sqrt{(1-y^2/b^2 - (z-b)^2/b^2}}\, dydz \qquad (5)$$

Заметим, что достаточно изучить случай $0 \le h \le b$, поскольку в силу симметричности задачи при $b \le h \le 2b$ $A_w(h)=A_w(2b)-A_w(2b-h)$. Поэтому далее будем считать, что $0 \le h \le b$, то есть $0 \le H \le 1$.

Для перехода к однократному интегралу в (5) удобно ввести полярные координаты $y = r\sin\varphi$, $z = b - r\cos\varphi$. В них область интегрирования будет задаваться условиями $b-h \le r \le b$, $|\varphi| \le \arccos((1-h)/r)$, а интеграл примет вид:

$$A_w(h) = \iint \frac{\sqrt{1-e^2 r^2/b^2}}{\sqrt{1-r^2/b^2}}\, r\,dr\,d\varphi \qquad (6)$$

Поскольку функция под интегралом не зависит от угла φ, по нему можно проинтегрировать, в результате получим:

$$A_w(h)=2\int_{b-h}^{b}\frac{\sqrt{1-e^2 r^2/b^2}}{\sqrt{1-r^2/b^2}}\, r\arccos\left(\frac{1-h}{r}\right)dr=b^2\int_{(1-H)^2}^{1}\frac{\sqrt{1-e^2 t}}{\sqrt{1-t}}\arccos\left(\frac{1-H}{\sqrt{t}}\right)dt, \qquad (7)$$

где безразмерный параметр $t = r^2/b^2$.

Интеграл в (7) не удается выразить в элементарных функциях, но он может быть рассчитан методами численного интегрирования.

Попробуем вывести приближенную формулу для интеграла в (7). Для этого представим его в виде:

$$A_w(h) = I_1(h) - I_2(h) + I_3(h), \qquad (8)$$

где

$$I_1(h) = b^2\int_{(1-H)^2}^{1}\frac{\sqrt{1-e^2 t}}{\sqrt{1-t}}\arccos(1-H)\,dt, \qquad (9)$$

$$I_2(h) = b^2\int_{(1-H)^2}^{1}\frac{\sqrt{1-e^2(1-H)^2}}{\sqrt{H(2-H)}}\left[\arccos(1-H)-\arccos\left(\frac{1-H}{\sqrt{t}}\right)\right]dt, \qquad (10)$$

$$I_3(h) = b^2\int_{(1-H)^2}^{1}\left[\frac{\sqrt{1-e^2 t}}{\sqrt{1-t}}-\frac{\sqrt{1-e^2(1-H)^2}}{\sqrt{H(2-H)}}\right]\left[\arccos\left(\frac{1-H}{\sqrt{t}}\right)-\arccos(1-H)\right]dt, \qquad (11)$$

Величины $I_1(h)$, $I_2(h)$ и $I_3(h)$ имеют ясный физический смысл. $I_1(h)$ представляет собой точную площадь поверхности полосы сфероида, определенной неравенствами $b-h \le r \le b$, $|\varphi| \le \arccos(1-H)$ (рисунок 2). $I_2(h)$ представляет собой приближенное выражение для площади поверхности куска сфероида, входящего в полосу, но не входящего в сегмент и определяемого условиями $b-h \le r \le ((b-h))/\cos\varphi$, $|\varphi| \le \arccos(1-H)$. $I_3(h)$ – остающаяся погрешность.

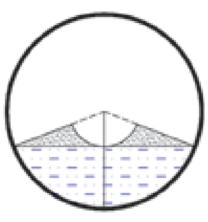

Рисунок 2

Численное интегрирование показывает, что величина $I_3(h)$ при характерных значениях эксцентриситета днища весьма мала. При этом интегралы (9) и (10) вычисляются аналитически, и в результате получается следующая приближенная формула:

$$A_w(h) \approx b^2\left\{\begin{array}{c}\sqrt{1-e^2(1-H)^2}\left[\dfrac{\arccos(1-H)}{\sqrt{H(2-H)}}-(1-H)\right]+\\ +\dfrac{(1-e^2)}{e}\arccos(1-H)\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-e^2(1-H)^2}+e\sqrt{H(2-H)}}{\sqrt{1-e^2}}\right)\end{array}\right\} \qquad (12)$$

В частности, при $e=\sqrt{0{,}75}$ она принимает вид:

$$A_w(h) \approx \tfrac{1}{2} b^2\left\{\begin{array}{c}\sqrt{4-3(1-H)^2}\left[\dfrac{\arccos(1-H)}{\sqrt{H(2-H)}}-(1-H)\right]+\\ +\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arccos(1-H)\ln\left[\sqrt{4-3(1-H)^2}+\sqrt{3H(2-H)}\right]\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Заметим, что когда эксцентриситет $e \to 1$ (то есть днище вырождается в плоское), формула (12) дает точное значение смачиваемой площади плоского днища.

На рисунке 3 показаны графики безразмерной величины смачиваемой поверхности $A_w(h)/A_w(2b)$ в зависимости от безразмерного уровня жидкости F для $e = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866$.

Как видим, предложенное приближенное решение практически совпадает с точным. В то же время формула Doane не только неправильно предсказывает характер зависимости, но и дает ошибку до 10% при $F > 0{,}5$, причем не в запас, а при $F < 0{,}5$ вообще ошибается в 1,5–2 раза. При этом расчеты по формуле (13) также хорошо совпадают с результатами, полученными прямым моделированием днища в Google SketchUp [8]. Заметим также, что зависимость смачиваемой поверхности от уровня жидкости довольно близка к линейной, что не случайно (для полусферического днища эта зависимость просто линейная).

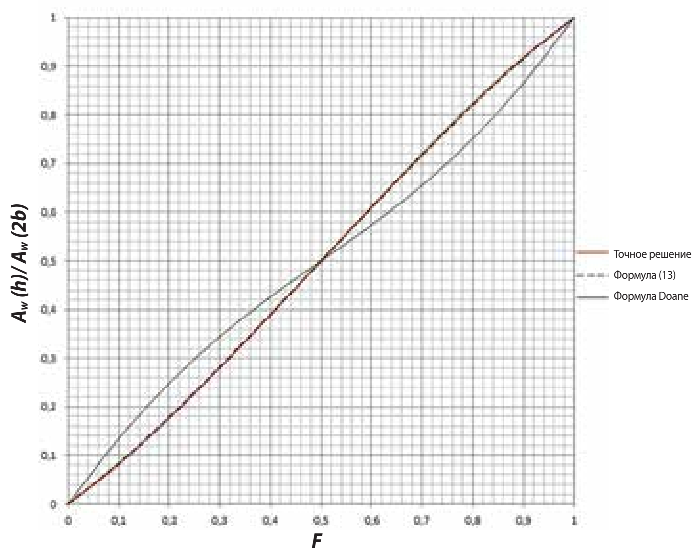

Рисунок 3

Таким образом, предложена явная аналитическая формула для смачиваемой поверхности эллиптического днища, учитывающая величину эксцентриситета и обеспечивающая отличную инженерную точность. Показано, что предложенная ранее формула в [7] весьма неточна.

Литература:

1. *Paul Lutus. Storage Container Mathematics. P. 15. URL: https://arachnoid.com/storage_container_mathematics/index.html.*
2. *Daniel R. Crookston, Reid B. Crookston. Calculate Liquid Volumes in Tanks with Dishes Heads. Chemical Engineering, September 2011, P. 55–63.*
3. *Garry J. Tee. Surface Area of Ellipsoid Segment. Technical report. Department of mathematics, University of Auckland, New Zealand (2005-7-12).*
4. *Garry J. Tee. Surface Area and Surface Integrals on Ellipsoid Segments. Technical report. Department of mathematics, University of Auckland, New Zealand (2005-8-15).*
5. *Kraniotis G. V., Leontaris G. K. Closed form Solution for Surface Area, the Capacitance and the Demagnetizing Factors of the Ellipsoid. 3 June 2013. P. 26. URL: https://arxiv.org/abs/1306.0509.*
6. *Richard A. Krajcik, Kelly D. McLenithan. Integrals and Series Related to the Surface Area of Arbitrary Ellipsoids. 8 May 2006, P. 53. URL: https://arxiv.org/abs/math/0605216v1.*
7. *Richard C. Doane. Accurate Wetted Areas for Partially Filled Vessels. Chemical Engineering, 2007, September, P. 56–57.*
8. *Wetted Surface Area Of Horizontal Vessel With 2:1 Ellipsoidal Head. URL: https://www.cheresources.com/invision/topic/6772-wetted-surface-area-of-horizontal-vessel-with-21-ellipsoidal-head.*

Москва, февраль 2018 года