Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ТРУДЫ

XVI Всероссийского научного семинара

г. Иркутск

26 июня – 02 июля 2018 г.

Иркутск
2018

ФГБУН Институт Систем Энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН

XVI Всероссийский научный семинар

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Труды семинара

26 июня – 02 июля 2018 г.

г. Иркутск

Иркутск
2018

УДК 519.6+519.8

Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня – 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018. – 366 с.

ISBN 978-5-93908-166-5.

В сборнике научных трудов обсуждаются актуальные проблемы математического моделирования трубопроводных систем (ТПС) энергетики – тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения, а также развития методов теории гидравлических цепей, имеющих межотраслевое значение.

Сборник предназначен для сотрудников научно-исследовательских, проектных и производственных организаций, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Ответственный за выпуск: к.т.н. Токарев Вячеслав Вадимович

Без объявления.

ISBN 978-5-93908-166-5

О ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С КРИТИЧЕСКИМ ТЕЧЕНИЕМ

Корельштейн Л.Б.
(ООО «НТП Трубопровод», г.Москва)

В статье изучается существование, единственность и свойства монотонности решения классической задачи потокораспределения в гидравлических цепях с ветвями, на которых может развиваться критическое течение. Показывается, что часть ранее полученных автором результатов для гидравлических цепей со строго монотонными зависящими от давления замыкающими соотношениями может быть распространена и на данный вид гидравлических цепей.

В недавней работе автора [1] установлено существование, единственность и свойства монотонности решения классической задачи потокораспределения (КЗП) при условиях строгой монотонности, непрерывности и «правильного» асимптотического поведения замыкающих соотношений ветвей, являющихся естественным обобщением условий, сформулированных С.П. Епифановым и В.И. Зоркальцевым для цепей с замыкающими соотношениями, зависящими только от разности давлений [2-6]. Однако на практике при течении сжимаемых сред (газов, газо-жидкостных смесей) при достижении скорости звука течение может переходить в критический режим, когда расход по ветви перестает зависеть от конечного давления. Это характерно, в частности, для систем аварийного сброса продукта. В этом случае строгая монотонность замыкающих соотношений не обеспечивается, и решение КЗП в общем случае может не существовать или быть не единственным. Тем не менее оказывается, что полученные ранее результаты при определенных ограничениях допускают обобщение и на цепи с критическим истечением.

Постановка задачи и ограничения на характеристики ветвей

Пусть G – ориентированный граф с N_V узлами (образующими множество узлов V) и N_E ветвями (образующими множество ветвей E). Расход X_i по i-й ветви связан с начальным и конечным давлениями P_{Fi} и P_{Li} замыкающим соотношением

$$X_i = \varphi_i(P_{Fi}, P_{Li}). \tag{1}$$

Пусть A – матрица инцидентности графа G ($a_{ij} = 1$, если ребро j начинается в узле i; $a_{ij} = -1$, если ребро j заканчивается в узле i; $a_{ij} = 0$ в остальных случаях); Q – вектор узловых притоков. Тогда уравнения Кирхгофа (уравнения балансов в узлах) записываются в виде

$$AX = Q. \tag{2}$$

Используя матрицы A_F и A_L, соответствующие выходящим и входящим ветвям ($A = A_F + A_L$), вектор узловых давлений P и вектор Φ функций φ_i, уравнения (1) можно записать в виде

$$X = \Phi(P_F, P_L),\ \ P_F = A_F^T P,\ \ P_L = -A_L^T P. \tag{3}$$

Таким образом, имеем $N_V + N_E$ уравнений для $2N_V + N_E$ неизвестных (P, Q и X). При этом, как известно, уравнения (2) не являются независимыми – для связного графа G матрица A имеет ранг $N_V - 1$, при этом притоки в узлах удовлетворяют дополнительному уравнению баланса:

$$\sum_{i=1}^{N_V} Q_i = 0. \tag{4}$$

Как видим, для связного графа G неизвестных на N_V больше, чем независимых уравнений, поэтому, чтобы задача была определенной, должны быть заданы значения N_V неизвестных.

В классической задаче потокораспределения (КЗП) задается вектор давлений P_{fix} в $N_P > 0$ узлах (образующих множество V_P) и вектор притоков Q_{fix} в остальных $N_Q = N_V - N_P$ узлах (образующих множество V_Q), при этом требуется найти давления P_{var} в остальных N_Q узлах, расходы по ветвям X и притоки Q_{var} в N_P узлах с заданным давлением. Последние определяются по уравнениям (1) и (2), так что найти, по существу, достаточно давления P_{var} в узлах с заданными притоками.

Для «традиционных» гидравлических цепей функции φ_i зависят только от разности давлений: $X_i = \varphi_i(P_{Fi} - P_{Li})$. В работе [2] сформулированы условия для функций φ_i (или обратных к ним функций f_i), при которых решение КЗП для «традиционных» гидравлических цепей гарантированно существует и единственно, а именно (Условия А):

1) Непрерывность;
2) Строгое монотонное возрастание;
3) Определенность на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$;
4) Совпадение области значений с $\mathbb{R}$, что с учетом монотонности эквивалентно условиям $\varphi_i(y) \to +\infty$ при $y \to +\infty$ и $\varphi_i(y) \to -\infty$ при $y \to -\infty$.

Строгая монотонность функции необходима для обеспечения единственности решения; непрерывность и возрастание вытекают из физических соображений. Эти условия почти всегда реализуются на практике.

Условия 3) и 4) являются только удобной математической экстраполяцией, призванной обеспечить существование решения при любых заданных давлениях и узловых притоках – на самом деле на практике область значений давлений всегда ограничена – почти всегда снизу (обычно как минимум положительностью абсолютных давлений), а часто и сверху (технологическими ограничениями, прочностью конструкции и т. д.), а соответственно ограничены и величины возможных расходов и узловых притоков. Поэтому (как отмечено и в [5]) на практике желательно иметь оценки границ величин заданных узловых давлений и узловых притоков, при которых задача заведомо имеет решение в рамках заданных границ изменения аргументов функций φ_i и f_i. Однако это самостоятельная задача.

Множество функций, удовлетворяющих описанным выше условиям 1) – 4), обозначим как $\tilde{Z}_a$. Оно отличается от введенного в [2-5] множества $\tilde{Z}$ только отсутствием условия равенства нулю в нуле. Множество функций $\tilde{Z}_a$ получается из $\tilde{Z}$ прибавлением к функциям произвольной постоянной. Функции из $\tilde{Z}$ представляют собой так называемые пассивные ветви (без напора), а функции из $\tilde{Z}_a$ включают в себя и активные ветви (с перепадом высот, насосами, компрессорами и т.п.).

В статье [1] были рассмотрены с гидравлические цепи с зависящими от давления замыкающими соотношениями, принадлежащими множеству функций $\tilde{Z}_a^2$. Последнее представляет собой естественное обобщение множества $\tilde{Z}_a$: Функция $\varphi \in \tilde{Z}_a^2$, если выполняются следующие условия (Условия А2):

1) $\varphi(P_F, P_L)$ является непрерывной функцией двух переменных P_F, P_L;
2) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F строго убывает по P_L;
3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L строго возрастает по P_F;
4) $\varphi(P_F, P_L)$ определена на всем $\mathbb{R}^2$;
5) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_L \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_L \to -\infty$;
6) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_F \to +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_F \to -\infty$.

Иначе говоря, множество $\tilde{Z}_a^2$ составляют непрерывные функции, которые при любом P_L принадлежат $\tilde{Z}_a$ как функции от P_F и при любом P_F принадлежат $-\tilde{Z}_a$ как функции от P_L.

Так же, как и в случае множества $\tilde{Z}_a$, условия 1) – 3) основываются на физических соображениях – а условия 4) – 6) являются математической экстраполяцией.

Множество $\tilde{Z}_a^2$ включает в себя подмножество функций $\tilde{Z}^2$, для которых $\varphi(P, P) = 0$ при любом P. Функции из $\tilde{Z}^2$ представляют собой характеристики пассивных ветвей, а $\tilde{Z}_a^2$ включают и активные ветви.

Однако на практике при течении сжимаемых сред условия строгой монотонности могут не выполняться. При заданном P_F расход по ветви $\varphi(P_F, P_L)$ с убыванием P_L может строго возрастать до $P_L = P_L^c(P_F)$, а при $P_L \le P_L^c$ перестает меняться: $\varphi(P_F, P_L) = \varphi(P_F, P_L^c) = \varphi^{c+}(P_F)$. При этом будем считать, что всегда $\varphi^{c+}(P_F) > 0$. Будем в этом случае говорить, что на ветви для давления P_F при критическом противодавлении P_L^c реализуется режим критического течения с расходом φ^{c+} (по направлению ветви).

Аналогично при заданном P_L и убывании P_F расход может строго убывать, становится отрицательным и затем стабилизироваться при $P_F \leq P_F^c$ на значении $\varphi(P_F, P_L) = \varphi(P_F^c, P_L) = \varphi^{c-}(P_L) < 0$, то есть реализуется режим критического течения против направления ветви.

Если $P_L > P_L^c(P_F)$ и $P_F > P_F^c(P_L)$ (или критические давления вообще не существуют), то течение будем называть докритическим.

Приведем простой пример подобного замыкающего соотношения, описывающего изотермическое турбулентное течение идеального газа по горизонтальной трубе. В этом случае при докритическом истечении

$$\varphi(P_F, P_L) = \left[\frac{DS^2}{\lambda RTL} \cdot \frac{P_F^2 - P_L^2}{1+\gamma\left|\ln\left(P_F^2/P_L^2\right)\right|}\right]^{1/2} \operatorname{sign}(P_F^2 - P_L^2).$$

Критическое давление P_L^c определяется из уравнения

$$P_F^2/P_L^{c2} - \gamma \ln(P_F^2/P_L^{c2}) - \gamma - 1 = 0$$

и аналогичным образом определяется критическое давление P_F^c.

Здесь λ – коэффициент гидравлического трения, R – газовая постоянная, T – температура газа, L, D, и S – длина, внутренний диаметр и площадь поперечного сечения трубы, $\gamma = D/\lambda L$.

На практике обычно приходится иметь дело с намного более сложными неявными замыкающими соотношениями.

Таким образом, вместо списка условий А2 на замыкающие соотношения, будем рассматривать список условий А2С, в котором условия 2), 3) и 5), 6) заменены на следующие:

2) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F строго убывает по P_L – либо при любых P_L, либо при $P_L > P_L^c$, а при $P_L \leq P_L^c$ $\varphi(P_F, P_L) = \varphi(P_F, P_L^c) = \varphi^{c+}(P_F) > 0$;
3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L строго возрастает по P_F – либо при любых P_F, либо при $P_F > P_F^c$, а при $P_F \leq P_F^c$ $\varphi(P_F, P_L) = \varphi\left(P_{F\,F}^c, P_L\right) = \varphi^{c-}(P_L) < 0$;
5) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) \to -\infty$ при $P_L \to +\infty$ и переходит в область положительных значений при $P_L \to -\infty$;
6) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \to +\infty$ при $P_F \to +\infty$ и переходит в область отрицательных значений при $P_F \to -\infty$.

Множество функций, удовлетворяющих всем условиям списка А2С, обозначим $\tilde{Z}_{ca}^2$. Заметим, что $\tilde{Z}_{ca}^2 \supset \tilde{Z}_a^2$. Подмножество функций $\tilde{Z}_{ca}^2$, соответствующих пассивным ветвям (для которых $\varphi(P, P) = 0$ при любом P), обозначим $\tilde{Z}_c^2$. При этом $\tilde{Z}_c^2 \supset \tilde{Z}^2$.

Вспомогательные свойства функций φ

Установим некоторые свойства функций, удовлетворяющим условиям А2С.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ – некоторое непустое открытое связное множество, и все функции φ_i определены на $\Omega \times \Omega$. В качестве Ω может выступать $\mathbb{R}$, либо полупрямая, либо открытый интервал (ограниченный нижней и верхней границами давления). Пусть φ удовлетворяет условиям 2) и 3). Тогда она обладает следующими свойствами.

Пусть $P = (P_F, P_L) \in \Omega \times \Omega$, $P'_F \in \Omega$ и $P'_F > P_F$. Тогда если критический расход $\varphi^{c+}(P'_F)$ существует, то $\varphi^{c+}(P'_F) > \varphi(P_F, P_L)$.

В самом деле, $\varphi^{c+}(P'_F) = \varphi\big(P'_F, P^c_L(P'_F)\big) = \varphi\left(P'_F, \min(P^c_L(P'_F), P_L)\right) > \varphi(P_F, P_L)$.

Отсюда также следует, что если $P'_F > P_F$ и критические расходы $\varphi^{c+}(P'_F)$ и $\varphi^{c+}(P_F)$ существуют, то $\varphi^{c+}(P'_F) > \varphi^{c+}(P_F)$, то есть φ^{c+} – строго возрастающая функция от P_F.

Аналогично, если $P'_L > P_L$ и критический расход $\varphi^{c-}(P'_L)$ существует, то $\varphi^{c-}(P'_L) < \varphi(P_F, P_L)$. При этом φ^{c-} – строго убывающая функция от P_L.

Пусть $\varphi(P_F, P_L)$ дополнительно к условиям 2) и 3) еще и непрерывна по обеим переменным (условие 1).

Множество пар давлений может быть разбито на 3 непересекающихся множества:

$$\Omega \times \Omega = \Lambda^{c+} \cup \Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc},$$

соответствующих критическому течению по направлению ветви, критическому течению против направления ветви и докритическому течению.

Очевидно, что для пассивных ветвей $\Lambda^{nc} \neq \emptyset$. Для активных ветвей оно может быть пустым, но тогда либо $\Lambda^{c+} = \Omega \times \Omega$, либо $\Lambda^{c-} = \Omega \times \Omega$.

Покажем, что множества $\Lambda^{c+} \cup \Lambda^{nc} = \Omega \times \Omega \setminus \Lambda^{c-}$, $\Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc} = \Omega \times \Omega \setminus \Lambda^{c+}$ и Λ^{nc} открыты.

Пусть $P = (P_F, P_L) \in \Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc}$. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что $(P_F - \varepsilon, P_F + \varepsilon) \subset \Omega$ и $(P_L - \varepsilon, P_L + \varepsilon) \subset \Omega$. Поскольку течение в точке P не является критическим в направлении ветви, $\varphi(P_F, P_L - \varepsilon) > \varphi(P_F, P_L)$. Поскольку φ непрерывна, всегда можно выбрать такое $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, что $\varphi(P_F - \varepsilon_1, P_L - \varepsilon) > \varphi(P_F, P_L)$, и такое $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, что $\varphi < \varphi(P_F - \varepsilon_1, P_L - \varepsilon)$ в области $(P_F - \varepsilon_2, P_F + \varepsilon_2) \times (P_L - \varepsilon_2, P_L + \varepsilon_2)$. Но поскольку для любой точки P' в этой области $P'_F > P_F - \varepsilon_1$, то если критическое течение (по направлению ветви) в этой точке возникает, для него $\varphi^{c+}(P'_F) > \varphi(P_F - \varepsilon_1, P_L - \varepsilon) > \varphi(P'_F, P'_L)$. Следовательно, $(P_F - \varepsilon_2, P_F + \varepsilon_2) \times (P_L - \varepsilon_2, P_L + \varepsilon_2) \subset \Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc}$, что и доказывает открытость $\Lambda^{c+} \cup \Lambda^{nc}$. Аналогичным образом доказывается открытость $\Lambda^{c+} \cup \Lambda^{nc}$. Поскольку $\Lambda^{nc} = (\Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc}) \cap (\Lambda^{c+} \cup \Lambda^{nc})$, то и оно открыто.

Пусть $[P_{\min}, P_{\max}] \subset \Omega$ и $K = [P_{\min}, P_{\max}] \times [P_{\min}, P_{\max}]$ Тогда если $K \cap \Lambda^{c+}$ не пусто, то оно замкнуто и ограничено, следовательно, компактно, и непрерывная функция φ на нем положительна, следовательно достигает на нем некоторого положительного минимума $\varphi_{\min K}^{c+} > 0$. Аналогично можно определить $\varphi_{\max K}^{c-} < 0$. Пусть $\varphi_{\min K}^{c} = \min(\varphi_{\min K}^{c+}, |\varphi_{\max K}^{c-}|) > 0$ (если одна из величин или обе не определены, вместо них можно взять любую положительную или соответственно отрицательную величину). Тогда если $P = (P_F, P_L) \in K$ и $|\varphi(P_F, P_L)| < \varphi_{\min K}^{c}$, то $P \in \Lambda^{nc}$. Иными словами, для любого ограниченного замкнутого интервала давлений всегда можно найти такую положительную верхнюю границу, что течение с меньшей абсолютной величиной расхода на этом интервале заведомо докритическое.

Пусть $\varphi \in \tilde{Z}_{ca}^2$. Тогда уравнения $\varphi(P_F, P) - X = 0$ и $\varphi(P, P_L) - X = 0$ относительно P определяют неявные функции $f_L(P_F, \mathrm{X})$ и $f_F(P_L, \mathrm{X})$, которые рассчитывают давление в конце ветви по давлению в начале и расходу, и наоборот, давление в начале ветви по давлению в конце и расходу. В силу определения $\tilde{Z}_{ca}^2$ эти функции определены соответственно на множествах $\mathrm{X} < \varphi^{c+}(P_F)$ и $\mathrm{X} > \varphi^{c-}(P_L)$ (либо как минимум при неположительных и неотрицательных расходах соответственно), строго монотонны по обоим параметрам (первая монотонно возрастает по давлению в начале ветви и монотонно убывает по расходу; вторая монотонно возрастает по обеим аргументам) и непрерывны по обоим аргументам. Это следует из «непрерывного» варианта теоремы о неявной функции [7, 8]. В частности, f_F определена для любых положительных расходах, а f_L – для любых отрицательных. При этом $f_L \to +\infty$ при $X \to -\infty$, а $f_F \to +\infty$ при $X \to +\infty$.

Заметим также, что направление любого ребра в нашей постановке задачи задано исключительно для удобства записи уравнений (чтобы условиться, в каком направлении расход считается положительным). Для удобства направление ребра всегда можно поменять, определив замыкающее соотношение для ребра с обращенным направлением $\varphi^*(P_F, P_L) = -\varphi(P_L, P_F)$.

Напомним также некоторые базовые факты из теории графов и введем соответствующие обозначения.

Пусть $\tilde{G}$ – ориентированный граф, и v_1, v_2 – 2 узла в нем. Достижимость v_2 из v_1 будем обозначать $v_1 \underset{\tilde{G}}{\to} v_2$. Множество всех узлов, достижимых (в $\tilde{G}$) из узла v, будем обозначать $\mathcal{R}_{\tilde{G}}(v)$, а множество узлов, из которых достижим узел v - $\mathcal{R}_{\tilde{G}}^{-1}(v)$. Для некоторого подмножества S узлов графа $\tilde{G}$ обозначим $\mathcal{R}_{\tilde{G}}(S)$ множество узлов, достижимых из узлов S, и $\mathcal{R}_{\tilde{G}}^{-1}(S)$ – множество узлов, из которых достижимы какие-либо узлы S.

Для любого узла v множество узлов $\mathcal{R}_{\tilde{G}}(v) \cap \mathcal{R}_{\tilde{G}}^{-1}(v)$ и соединяющие их ветви представляют собой максимальный сильно связный подграф, содержащий v. Как известно, граф $\tilde{G}$ состоит из совокупности таких сильно связных подграфов и соединяющих их ветвей («мостов»). Граф, полученный заменой каждого такого сильно связного подграфа одним узлом, называется «конденсатом» графа $\tilde{G}$ (будем обозначать его $\mathrm{Condens}(\tilde{G})$). $\mathrm{Condens}(\tilde{G})$ является графом без рециклов, и следовательно, имеет непустое множество вершин-стоков: $\mathrm{Sink}\left(\mathrm{Condens}(\tilde{G})\right) \neq \emptyset$.

Для узла v с заданным притоком графа G ($v \in V_Q$) обозначим $Pcomp(v)$ P-компонент графа, которому данный узел принадлежит (см. [1]).

Введем также понятие достижимости в границах P-компонентов [1], при котором рассматриваются только пути с промежуточными узлами из V_Q. Соответствующий оператор будем обозначать $\hat{\mathcal{R}}_G$.

Единственность и свойства монотонности решения КЗП

Легко видеть, что решение КЗП для гидравлических цепей с критическим течением, вообще говоря, может не существовать (например, если мы для цепи из одной ветви потребуем оттока в узле, превышающего величину критического расхода) или быть неединственным (противодавление может меняться, не влияя на остальные параметры).

Однако можно сформулировать простое условие, при котором единственность решения КЗП обеспечена.

Пусть для графа G известно некоторое решение заданной на нем КЗП. Рассмотрим граф G^c («граф критичности течения»), получаемый из G модификацией ориентации ветвей – ветви с докритическим течением будем считать в графе G^c неориентированными (проходимыми в обоих направлениях – можно считать их парой противоположно направленных ветвей), а ветви с критическим течением – ориентированными в сторону течения. Тогда оказывается, что условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$ (достижимость в графе G^c узла с заданным давлением из любого узла) является достаточным для единственности решения КЗП. Позже мы покажем, что для цепей с непрерывными замыкающими соотношениями оно также является и необходимым – т.е. если оно не выполняется, то решение КЗП заведомо не единственно. Данное условие эквивалентно присутствию узлов с заданным давлением во всех сильно связанных подграфах, соответствующих стокам конденсата G^c: $\mathrm{Sink}\left(\mathrm{Condens}(G^c)\right)$.

<u>Теорема 1 (о единственности решения КЗП для цепей с критическим истечением)</u>

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 2 и 3 списка A2C, и известно решение КЗП. Тогда узловые давления всех других решений данной КЗП совпадают в узлах $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P)$. Если $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$, то решение единственно.

<u>Доказательство Теоремы 1.</u>

Пусть есть 2 решения КЗП с векторами узловых давлений P^1 и P^2 и соответствующими векторами расходов и притоков X^1, X^2, Q^1, Q^2, и G^c – граф, соответствующий первому решению. Пусть
V^+ – множество тех узлов, для которых $P_i^2 > P_i^1$ (давление увеличилось);
V^- – множество тех узлов, для которых $P_i^2 < P_i^1$ (давление уменьшилось);
V^0 – множество тех узлов, для которых $P_i^2 = P_i^1$ (давление не изменилось);

Очевидно, что $V^+ \subseteq V_Q$ и $V^- \subseteq V_Q$, а $V^0 \supseteq V_P$.

Предположим, что $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+ \neq \emptyset$. Рассмотрим сумму всех притоков в узлах из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$. В силу уравнений (2) эта сумма равно расходам по ветвям, соединяющим узлы из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$с узлами из $V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$ (если для удобства поменять направление этих ветвей так, чтобы все они были направлены из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$в $V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$):

$$\sum_{v \in \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+} Q(v) = \sum_{v \in \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+, u \in V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+} X(e_{vu}). \quad (5)$$

Поскольку G связен, а $V_P \neq \emptyset$ (и следовательно $V^0 \neq \emptyset$), множество ветвей, соединяющих $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$с $V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$, не пусто. Поскольку из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$ узлов достижимы узлы V_P, среди этих ветвей должна быть хотя бы одна с докритическим течением либо критическим, но в сторону из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$ в $V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+$. Для такой ветви (ветвей) начальное давление при переходе от решения 1 к решению 2 увеличилось, а конечное уменьшилось или осталось там же. Следовательно, расход по ней (ним) увеличился. Расход по остальным ветвям также либо увеличился, либо остался тем же. Поэтому сумма расходов по ветвям в правой части уравнения (5) увеличилась – в том время как левая часть (являющаяся суммой заданных притоков!) должна остаться той же – что невозможно. Следовательно, $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^+ = \emptyset$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \cap V^- = \emptyset$. Тогда получаем, что $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \subseteq V^0$, а это и доказывает первое утверждение теоремы.

Если $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$, то у двух решений совпадают все узловые давления – что влечет совпадение решений.

Проблема с Теоремой 1 заключается в том, что заранее по исходным данным КЗП не всегда можно сказать, каково будет $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P)$, и, следовательно, будет ли решение единственным. Однако для некоторых важных случаев КЗП это можно сделать.

<u>Теорема 2 (о единственности решения задачи аварийного сброса)</u>

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 2 и 3 списка А2С. Для решения КЗП на нем с неотрицательным вектором заданных притоков в узлах ($Q_{fix} \geq 0$) $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$, и, следовательно, решение единственно.

Доказательство теоремы 2.

Согласно Теореме 1 достаточно доказать, что $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$. Предположим, что это не так, и $V^* = V \setminus \mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \neq \emptyset$. Запишем для него уравнение баланса, аналогичное уравнению (5):

$$\sum_{v\in V^*} Q(v) = \sum_{v\in V^*, u\in V\setminus V^*} X(e_{vu}). \quad (6)$$

Сумма слева неотрицательна. Сумма справа не пуста (т.к. граф G связен), следовательно, хотя бы одно слагаемое справа должно быть неотрицательно. Это означает, что расход по соответствующей ветви направлен «из V^*» или нулевой – а значит на этой ветви нет критического течения в сторону V^*. Но тогда по этой ветви в G^c можно пройти из V^* в $V \setminus V^*$, следовательно, из ее начального узла v можно пройти в узел с заданным давлением, и, следовательно, $v \notin V^*$. Пришли к противоречию, что и доказывает теорему.

Случай $Q_{fix} \geq 0$ охватывает как раз наиболее типичные задачи расчета систем аварийного сброса, когда либо задан сбрасываемый расход, либо давления в системах высокого и низкого давления и необходимо рассчитать пропускную способность системы.

На самом деле условия теоремы 2 можно дополнительно ослабить, если известны границы возможных узловых давлений. Будем рассматривать решения КЗП с узловыми давлениями, лежащими в интервале $[P_{\min}, P_{\max}] \subset \Omega$. Как показано в разделе 2 статьи, для каждой i-й ветви можно найти такое $\varphi_{\min i}^c > 0$, что если $|X_i| < \varphi_{\min i}^c$, то течение на i-й ветви докритическое. Возьмем $\varphi_{\min}^c = \min\limits_i(\varphi_{\min i}^c)$. Тогда справедлив следующий вариант Теоремы 2.

Теорема 2а.

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 2 и 3 списка А2С. Для решения задачи КЗП на нем с узловыми давлениями, лежащими в интервале $[P_{\min}, P_{\max}]$ и вектором заданных притоков в узлах, удовлетворяющих условию $\sum_{v\in V_Q, Q_{fix}(v)<0} Q_{fix}(v) > -\varphi_{\min}^c$ (то есть с ограниченной суммой отрицательных заданных притоков), всегда $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$, и, следовательно, решение единственно.

Доказательство теоремы 2а проводится аналогично доказательству теоремы 2, только в уравнении (6) левая часть $> -\varphi_{\min}^c$, поэтому в правой части хотя бы одно слагаемое тоже $> -\varphi_{\min}^c$, а это означает, что на соответствующей ветви нет критического течения в сторону V^*.

Рассмотрим теперь свойства монотонности решения КЗП для цепей с критическим течением. Сформулируем соответствующую теорему в наиболее общем виде.

Теорема 3 (о монотонности решения КЗП для цепей с критическим течением)

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности, и 2 решения задачи КЗП (решения 1 и 2) с совпадающими непустыми множествами V_P и V_Q, заданными давлениями $P_{fix}^{(1)}$ и $P_{fix}^{(2)}$ и заданными притоками $Q_{fix}^{(1)}$ и $Q_{fix}^{(2)}$, причем $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix}^{(2)}$. Обозначим V_P^+ и V_Q^+ множества узлов с заданными давлениями и притоками, для которых неравенство между исходными данными строгое. Пусть $G_{(1)}^c$ и $G_{(2)}^c$ – графы критичности течения этих решений, а $G_{(1)\cup(2)}^c$ – их объединение (содержащий ветвь в определенном направлении, если хотя бы один из $G_{(1)}^c$ и $G_{(2)}^c$ ее содержит). Тогда справедливы следующие неравенства.

1) $P_{var}^{(1)}(v) \le P_{var}^{(2)}(v)$ для $\forall v \in \mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q$, причем $P_{var}^{(1)}(v) < P_{var}^{(2)}(v)$ для $\forall v \in \mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$ и $P_{var}^{(1)}(v) = P_{var}^{(2)}(v)$ для всех остальных узлов $v \in \mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q$.
2) Если $N_P = 1$ и $V_Q^+ \ne \emptyset$, то в единственном узле v с заданным давлением $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$, иначе $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.
3) Если $N_P > 1$, то $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$ для $\forall v \in (V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$ и $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$ для всех остальных узлов $v \in (V_P \setminus V_P^+)$.
4) Если $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \ne \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \ne \emptyset$, то при $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}(V_P^+) \ne \emptyset$ справедливо $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) < \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$, а при $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}(V_P^+) = \emptyset$ – $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) = \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$.

Доказательство Теоремы 3.

Доказательство теоремы основывается на применении и анализе уравнения (6) для различных множеств V^*.

Докажем пункт 1 теоремы. Сначала установим нестрогое неравенство. Пусть V^* – подмножество узлов $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q$, для которых оно не выполняется, то есть $P_{var}^{(1)}(v) > P_{var}^{(2)}(v)$. Если V^* не пусто, то в уравнении (6) для него левая часть не уменьшается при переходе от решения 1 к решению 2. Сумма в правой части состоит из расходов по ветвям, соединяющим V^* с $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q \setminus V^*$ и с $V \setminus \mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P)$. Для первой группы ветвей начальное давление (при переходе к 2-му решению) уменьшается, а конечное увеличивается или остается тем же. При этом среди первой группы ветвей обязательно должна быть хотя бы одна, в которой течение хотя бы в одном из 2-х решений не является критическим в сторону V^* (иначе из V^* не были бы достижимы узлы V_P). Расход по таким ветвям должен уменьшиться, следовательно, сумма расходов по первой группе ветвей должна уменьшится. Для ветвей же, соединяющих V^* с $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$, течение должно быть критическим для обоих решений в сторону из V^* (иначе для их концов в $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$ будут достижимы узлы из V^*, а значит и из V_P), следовательно, расход по каждой из таких ветвей должен уменьшиться, а значит и сумма расходов по данной группе ветвей. В итоге получаем, что правая часть (6) должна уменьшиться, а левая часть (6) – нет. Следовательно, $V^* = \emptyset$.

Теперь докажем строгое неравенство и равенство из пункта 1.

Сначала докажем строгое неравенство для узлов из $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap V_Q^+$. Пусть $v \in \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap V_Q^+$, и V^* состоит из одного этого узла v. Тогда левая часть (6) возрастает (по определению V_Q^+), следовательно должно возрастать хотя бы одно слагаемое (расход по ветви) в правой части. Для ветвей, соединяющих v с $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$, по которым течение критическое в сторону из v, такое возможно, только если давление в v возрастает. Для ветвей, соединяющих v с $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$, давления на концах не уменьшаются, следовательно, для увеличения расходов давление в v должно увеличиться. Таким образом, $P^{(1)}_{var}(v) < P^{(2)}_{var}(v)$.

Теперь докажем строгое неравенство для узлов из $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_P^+) \cap V_Q$, непосредственно соединенных с узлами из V_P^+. Пусть $v \in \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_P^+) \cap V_Q$ и соединен ветвью с некоторым узлом $u \in V_P^+$, поток по ветви e_{vu} докритический или критический в сторону u хотя бы для решения 2. Пусть V^* состоит из одного узла v. Тогда левая часть уравнения (6) не уменьшится. Рассмотрим слагаемые правой части. Сумма складывается из расходов по ветвям, соединяющих v с $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$, по которым течение критическое в сторону из v; и из ветвей, соединяющих v с $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$, среди которых ветвь vu. Если бы давление в v не менялось, расход по vu бы уменьшился, а по остальным не возрос – то есть правая часть бы уменьшилась. Поэтому давление в v возрастает.

Докажем теперь строгое неравенство для всех узлов множества $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$, если последнее не пусто. Мы уже выше доказали, что узлы со строгим неравенством в этом множестве есть, если в нем есть узлы с равенством, то пусть v – тот из них, к которому путь от $V_Q^+ \cup V_P^+$ в $G_{(1)\cup(2)}^c$ самый короткий. Тогда он связан с хотя бы одним узлом u из $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$, для которого выполняется строгое неравенство. Снова рассматриваем уравнение баланса (6) для узла v. Левая часть не меняется, слагаемые в правой части не уменьшаются, но для ветви vu расход возрастает – противоречие. Таким образом, строгое неравенство для всех узлов $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$ доказано.

Докажем теперь строгое равенство для всех узлов $\left(\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q\right) \setminus \left(\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q\right)$. Пусть V^* – подмножество всех узлов данного множества, для которых давление возрастает. Снова рассматриваем для него уравнение (6). Левая его часть не меняется. Правая часть состоит из потоков по ветвям, соединяющим узлы V^* с узлами из $\left(\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap V_Q\right) \setminus \left(\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q\right) \setminus V^*$, из $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$ и из V_P. Последняя группа ветвей состоит из ветвей, либо соединяющих с узлами из $V_P \setminus V_P^+$, либо с узлами из V_P^+, но с критическим течением для решения 2 в сторону V_P^+. Расход по последним ветвям всегда возрастает при переходе от решения 1 к решению 2, кроме случая ветвей, соединяющих с $V_P \setminus V_P^+$ и критическим расходом для обоих решений в сторону V^*. Расход по 2-й группе ветвей для 2-го решения также должен быть критическим в сторону из V^* (иначе концы этих ветвей в V^* принадлежали бы $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q$), и, следовательно, расход по ним тоже всегда возрастает. Наконец, для первой группы ветвей расход также должен возрастать, за исключением случая, когда расход по ним для обоих решений критический в сторону V^*. Поскольку левая часть (6) не меняется, отсюда следует, что все соединяющие V^* с $V \setminus V^*$ имеют критический расход в сторону V^* для обоих решений. Но тогда узлы V^* не могут принадлежать $\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P)$! Пришли к противоречию – следовательно $V^* = \emptyset$, что завершает доказательство пункта 1 теоремы 3.

Пункт 2 теоремы 3 очевидно следует из уравнения баланса притоков в узлах (4).

Докажем пункт 3 теоремы. Пусть $N_P > 1$ и $v \in (V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$. Вновь рассмотрим уравнение (6) для V^* из одного узла v. Узел v может быть соединен ветвями с узлами из V_P и V_Q. Поскольку $v \in \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$, среди этих ветвей должны быть ветви, соединяющие с узлами $u \in \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$, причем течение по vu докритическое или критическое в сторону v хотя бы для одного из решений. Но тогда если $u \in V_Q$, то $u \in \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_Q^+ \cup V_P^+) \cap V_Q$, а если $u \in V_P$, то $u \in V_P^+$. В любом случае давление в узле v не меняется, а в узле u (с учетом пункта 1 теоремы) возрастает. Следовательно, расход по ветви vu уменьшается.

Для ветвей, у которых $u \notin \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_Q^+ \cup V_P^+)$, имеем либо $u \in V_P \setminus V_P^+$, либо $u \in V_Q \setminus \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_Q^+ \cup V_P^+)$. При $u \in V_P \setminus V_P^+$ расход по ветви не меняет, так как не меняются давления на концах ветви. При $u \in V_Q \setminus \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_Q^+ \cup V_P^+)$ либо $u \in \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$ – и тогда согласно пункту 1 теоремы давления на концах ветви, а следовательно и расход по ней, не меняются, либо $u \notin \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)\cup(2)}}(V_P)$ – но тогда расход по этой ветви критический в сторону u для обоих решений – следовательно расход не зависит от давления в u и тоже не меняется.

Итак, правая часть (6) состоит из суммы по ветвям, на которых расход не меняется, и (непустой!) суммы по ветвям, на которых он уменьшается. Следовательно, левая часть (6) уменьшается, что и доказывает строгое неравенства пункта 3 теоремы. Вторая часть пункта 3 теоремы доказывается совершенно аналогично (в этом случае в уравнении (6) справа все слагаемые не изменяться).

Пункт 4 теоремы следует из пункта 3 и уравнения (4).

Следствие 1 теоремы 3 (монотонность притока при возрастании заданного давления в одном узле)

Пусть при условиях теоремы 3 $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \neq \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \neq \emptyset$ и V_P^+ состоит только из одного узла v. Тогда согласно п.4 теоремы $Q_{var}^{(1)}(v) < Q_{var}^{(2)}(v)$ при $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(v) \neq \emptyset$ и $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$ при $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(v) = \emptyset$.

Следствие 2 теоремы 3 (строгая монотонность неотрицательных притоков по давлениям)

Пусть выполнены условия п.4 теоремы 3, $Q_{fix}^{(1)} = Q_{fix}^{(2)} \geq 0$ и $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_P^+) = \emptyset$. Положим $V^* = \hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}(V_P^+)$ и рассмотрим уравнение (6). В правой части стоит сумма по ветвям с критическим течением, направленным в V^* – то есть сумма справа отрицательна. Сумма слева состоит из неотрицательных слагаемых для узлов из V_Q и суммы $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) = \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$. Следовательно, $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) = \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v) < 0$.

Отсюда вытекает и обратное утверждение – если $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \neq \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \neq \emptyset$, $Q_{fix}^{(1)} = Q_{fix}^{(2)} \geq 0$ и $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) \geq 0$, то $(V_P \setminus V_P^+) \cap \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}(V_P^+) \neq \emptyset$, а следовательно, $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) < \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$. В частности, если V_P^+ состоит из одного узла v, то из $Q_{var}^{(1)}(v) \geq 0$ следует $Q_{var}^{(1)}(v) < Q_{var}^{(2)}(v)$.

Следствие 3 теоремы 3 (О «локальности» влияния).

Согласно п.1 теоремы 3 на подграфе, состоящем из узлов $\left(\mathcal{R}_{G_{(1)\cup(2)}^c}^{-1}(V_P) \setminus \hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)\right) \cup (V_P \setminus V_P^+)$ и соединяющих их ветвей, решения 1 и 2 совпадают. В частности, они совпадают и на $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P) \setminus \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$ – иными словами, уменьшение давлений и притоков влияет только на сильно связные компоненты, которые достижимы из узлов с изменением исходных данных. При этом по ветвям, связывающим $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P) \setminus \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$ с $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$, течение для решения 2 критическое в сторону $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$ и, очевидно, остается таковым и для решения 1.

В совокупности следствия 2 и 3 показывают, что при уменьшении заданных давлений в одном или нескольких узлах суммарный приток по ним может (при некотором отрицательном значении) перестать уменьшаться – в тот момент, когда возникает система ветвей с критическим истечением, «отделяющая» данный узлы от других узлов с заданным давлением и «контролирующая» суммарный приток в подграф с этими узлами. Дальнейшее уменьшение давлений не изменит суммарный приток, те же ветви с критическим течением будут продолжать контролировать приток (но в самом подграфе могут появиться дополнительные ветви с критическим течением). Таким образом, мы видим, что гидравлическая цепь в целом «выходит на режим критического течения» подобно отдельной ветви.

Следствие 4 теоремы 3 (о «монотонности» множества $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P)$).

При условиях теоремы 3 $\mathcal{R}_{G_{(1)}^c}^{-1}(V_P) \subseteq \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P)$. В частности, если $\mathcal{R}_{G_{(1)}^c}^{-1}(V_P) = V$, то и $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P) = V$. При этом $\hat{\mathcal{R}}_{G_{(2)}^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap \left(V \setminus \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P)\right) = \emptyset$ (в том числе $V_Q^+ \cap \left(V \setminus \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P)\right) = \emptyset$ – то есть заданные притоки в узлах $V \setminus \mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P)$ не меняются).

Для доказательства положим $V^* = V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(2)}}(V_P)$, и допустим, что $V^* \neq \emptyset$. Рассмотрим уравнение (6). Поскольку $V^* \cap V_P = \emptyset$, слагаемые в левой части представляют собой заданные в узлах притоки и при переходе от решения 2 к решению 1 уменьшаются для узлов из $V_Q^+ \cap V^*$ и остаются теми же для остальных узлов V^*. В правой части стоит сумма расходов по ветвям, соединяющим V^* с $V \setminus V^*$ (выберем их направление из V^* в $V \setminus V^*$). Она не пуста (из-за связности G) и включает только ветви с критическим течением из $V \setminus V^*$ в V^*. Пусть e_{vu} – любая такая ветвь. Для нее $X^{(2)}(e_{vu}) = \varphi^{c-(2)}\left(P^{(2)}(u)\right)$. В соответствии с п.1 теоремы 3 $P^{(1)}(u) \leq P^{(2)}(u)$, причем для $u \in \left(\hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V_Q\right) \cup V_P^+$ неравенство строгое. Но тогда (как доказано в п.2 статьи) $X^{(1)}(e_{vu}) \geq \varphi^{c-(2)}\left(P^{(2)}(u)\right) = X^{(2)}(e_{vu})$ при $P^{(1)}(u) = P^{(2)}(u)$ и $X^{(1)}(e_{vu}) > \varphi^{c-(2)}\left(P^{(2)}(u)\right) = X^{(2)}(e_{vu})$ при $P^{(1)}(u) < P^{(2)}(u)$; при этом в первом случае равенство расходов возможно только если критический характер течения по ветви сохраняется. Таким образом, при переходе от 2-го решения к 1-му левая часть (6) не возрастает – а правая не убывает. Но при этом уравнение (6) должно выполняться и для 1-го решения. Это возможно только если ни одно слагаемое в правой и левой частях (6) не меняется, то есть только если $V_Q^+ \cap V^* = \emptyset$, $\hat{\mathcal{R}}_{G^c_{(2)}}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right) \cap V^* = \emptyset$ и течение по всем ветвям, соединяющим V^* с $V \setminus V^*$, остается критическим в сторону V^*. Но это означает, что для решения 1 из узлов V^* также нельзя достичь V_P, то есть $V^* = V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(2)}}(V_P) \subseteq V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)}}(V_P)$, то есть $\mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(1)}}(V_P) \subseteq \mathcal{R}^{-1}_{G^c_{(2)}}(V_P)$.

Из данного следствия очевидно вытекает также следствие 5.

Следствие 5 теоремы 3 (о неразрешимых КЗП)

Пусть для решения некоторой КЗП $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c}(V_P) \neq \emptyset$. Тогда задача КЗП с теми же исходными данными, но уменьшенными заданными притоками в одном или более узлах $V \setminus \mathcal{R}^{-1}_{G^c}(V_P)$ не имеет решения.

Непрерывность решения КЗП

Добавим теперь к требованиям 2) и 3) списка A2C на функций φ_i требование 1) непрерывности по обоим концевым давлениям. Посмотрим, какие дополнительные свойства решения КЗП это влечет.

Обозначим Y вектор, составленный из исходных данных КЗП – первые N_P компонент – заданные узловые давления P_{fix}, остальные N_Q – заданные узловые притоки Q_{fix}; $Y \in \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$. Обозначим через E_u множество тех Y, для которых КЗП имеет решение, и притом единственное. Можно ли что-то сказать о нем?

Рассмотрим отображение $\Psi: \Omega^{N_V} \to \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$, ставящее в соответствие вектору узловых давлений P вектор Y, составленный из давлений P_i в узлах из V_P и расходов Q_i в узлах из V_Q, рассчитанных из P по уравнениям (1) – (2). Фактически отображение Ψ ставит в соответствие вектору P исходные данные той КЗП, решением которой он является. Обозначим $E_{\mathcal{R}}$ множество векторов узловых давлений $Y \in \Omega^{N_V}$, для которых выполнено условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$. В силу теоремы 1 $\Psi(E_{\mathcal{R}}) \subseteq E_u$. Тогда имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 4 (о непрерывности и свойствах монотонности решения КЗП для цепей с критическим истечением).</u>

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям 1)-3) списка A2C. Тогда:

1. $\Psi(E_{\mathcal{R}}) = E_u$ (то есть условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$ является не только достаточным, но и необходимым условием единственности решения).
2. Множества $E_{\mathcal{R}}$ и E_u открыты, а Ψ – гомеоморфизм между ними.
3. Все параметры решения КЗП (узловые давления, расходы, притоки) являются непрерывными функциями исходных данных на E_u.
4. Решение КЗП на E_u обладает следующими свойствами монотонности от исходных данных:

a. Давления во всех узлах из V_Q не убывают при возрастании заданных притоков и заданных давлений. При этом они строго возрастают в узлах увеличения притоков, а также строго возрастают (в окрестности решения) в тех узлах своего P-компонента, которые достижимы в G^c из тех узлов своего P-компонента, где заданное давление или приток возрастают (узлов $\widehat{\mathcal{R}}_{G^c}\left(V_Q^+ \cup V_P^+\right)$), и не зависят от исходных данных в других P-компонентах.

b. Притоки во всех узлах из V_P не возрастают при возрастании заданных притоков в узлах P-компонент, в которые они входят, и не зависят от заданных притоков в других узлах. При этом они строго убывают (в окрестности решения) в тех узлах, которые достижимы в G^c из узлов содержащего их P-компонента, где заданный приток возрастает (узлах из $\widehat{\mathcal{R}}_{G^c}\left(V_Q^+\right)$).

c. Приток в узле из V_P:

i. Не убывает при росте давления в том же узле, если в G есть другие узлы с заданным давлением. При этом он строго возрастает в окрестности решения, если из данного узла в G^c достижимы другие узлы V_P и не меняется в противном случае. В частности, он всегда строго возрастает при неотрицательной величине притока. Если он не меняется в окрестности некоторого давления, то не меняется и при любых меньших давлениях.

ii. Строго убывает (в окрестности решения) при росте давления в другом узле с заданным давлением из того же Р-компонента, из которого он достижим в G^c.

iii. Не меняется во всех остальных случаях.

Доказательство теоремы 4.

Прежде всего докажем, что множество $E_{\mathcal{R}}$ открыто. Пусть вектор узловых давлений $Y \in E_{\mathcal{R}}$. В разделе 2 статьи доказана открытость множеств $\Lambda^{c+} \cup \Lambda^{nc} = \Omega \times \Omega \setminus \Lambda^{c-}$, $\Lambda^{c-} \cup \Lambda^{nc} = \Omega \times \Omega \setminus \Lambda^{c+}$ и Λ^{nc} для каждой ветви. Это означает, что можно выбрать такую окрестность значений узловых давлений на концах ветви, в рамках которой характер течения не меняется или становится докритическим. Выберем такие окрестности для каждой ветви, и для каждого узла возьмем их пересечение по всем ветвям, которым принадлежит узел. Получим систему окрестностей узловых давлений, в рамках которых «проходимость» каждой ветви в G^c останется той же или «возрастет» (ветвь станет проходимой в обоих направлениях), следовательно условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$ останется выполненным для любого набора узловых давлений в этих окрестностях – что и доказывает открытость $E_{\mathcal{R}}$.

Поскольку функции φ_i непрерывны, отображение Ψ также является непрерывным. В силу теоремы 1 оно является инъективным на $E_{\mathcal{R}}$. Поэтому в силу теоремы Брауэра об инвариантности области отображение Ψ является гомеоморфизмом, а его образ – множество $\Psi(E_{\mathcal{R}})$ – открыто и гомеоморфно $E_{\mathcal{R}}$. Очевидно, что $\Psi(E_{\mathcal{R}}) \subseteq E_u$. Совпадение этих множеств будет доказано далее.

Поскольку Ψ – гомеоморфизм, обратное отображение Ψ^{-1} непрерывно на $\Psi(E_{\mathcal{R}})$. Это означает, что узловые давления непрерывно зависят от исходных данных КЗП. Поскольку φ_i также непрерывны, рассчитываемые по уравнениям (1) и (2) расходы по ветвям и притоки в узлах также непрерывно зависят от исходных данных КЗП.

3-й пункт теоремы прямо вытекает из теоремы 3 и следствий из нее.

Остается доказать, что $\Psi(E_{\mathcal{R}}) = E_u$. Пусть есть некоторое решение КЗП с заданными множествами V_P и V_Q, для которого условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$ не выполнено. Покажем, что тогда решение данной КЗП не единственно, и, следовательно, вектор ее исходных данных не принадлежит E_u.

Рассмотрим конденсат G^c для данного решения и множество его вершин-стоков $\mathrm{Sink}(\mathrm{Condens}(G^c))$. Из $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) \neq V$ вытекает, что среди них есть те, для которых соответствующие сильно связные подграфы G^c не содержат узлов из V_P. Пусть подобных вершин-стоков $N_S > 0$. Выберем в каждом из соответствующих им подграфов какой-либо узел v_i, и рассмотрим модифицированную КЗП, отличающуюся тем, что в узлах v_i задаются давления, а не притоки. Решение исходной КЗП совпадает с решением модифицированной КЗП, если задать в давления в узлах v_i, равные давлениям исходной задачи, при этом условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$ выполнено. Таким образом, вектор исходных данных модифицированной КЗП принадлежит $\Psi(E_{\mathcal{R}})$ для модифицированной задачи. Следовательно, можно выбрать такую окрестность этих исходных данных, в которой решение модифицированной КЗП существует и единственно. Будем в рамках такой окрестности уменьшать заданные давления в узлах v_i, не меняя остальных исходных данных. Из пункта c.i теоремы вытекает, что при этом притоки в узлах v_i не изменятся – и мы получим бесконечное, зависящее от N_S параметров множество решений исходной КЗП.

Из Теоремы 4 также следует следующая теорема, аналогичная соответствующей теореме для общего случая гидравлических цепей без критического течения [1].

<u>Теорема 5 (о существовании и единственности решения КЗП для промежуточных исходных данных).</u>

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими 1)-3) списка A2C, на котором определена КЗП, и КЗП с множествами узлов с заданными давлениями и притоками V_P и V_Q, и известны решения КЗП для 2-х наборов исходных данных $P_{fix}^{(1)}$, $Q_{fix}^{(1)}$ и $P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(2)}$, причем $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix}^{(2)}$ и решение для первого набора исходных данных единственно. Тогда:

1. Решение для 2-го набора исходных данных единственно.
2. Для любых «промежуточных» исходных данных $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix} \le P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix} \le Q_{fix}^{(2)}$ существует и единственно, и при этом $P_{var}^{(1)} \le P_{var} \le P_{var}^{(2)}$.

<u>Доказательство теоремы 5.</u>

Согласно теореме 4 из единственности решения для первого набора исходных данных следует, что $\mathcal{R}_{G_{(1)}^c}^{-1}(V_P) = V$. Из следствия 4 теоремы 3 тогда $\mathcal{R}_{G_{(2)}^c}^{-1}(V_P) = V$, и решение для 2-го набора исходных данных также единственно. Согласно п.1 теоремы 3 $P_{var}^{(1)} \le P_{var}^{(2)}$.

Условия $P_{fix}^{(1)} \le P_{fix} \le P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(1)} \le Q_{fix} \le Q_{fix}^{(2)}$ на исходные данные КЗП задают некоторый гипер-параллелепипед K в N_V-мерном пространстве. Требуется доказать, что для всех его точек решение существует. Единственность такого решения будет следовать (как и для 2-го набора исходных данных) из теоремы 4 и следствия 4 теоремы 3, а неравенство $P_{var}^{(1)} \le P_{var} \le P_{var}^{(2)}$ – из п.1 теоремы 3.

Итак, рассмотрим множество тех точек K, для которых решение КЗП не существует, и предположим, что оно не пусто. Поскольку ситуации, когда решение существует, но не единственно, для точек K (как показано выше) не бывает, это множество совпадает с $K \setminus E_u$. Множество K компактно, а E_u открыто согласно теореме 4. Поэтому $K \setminus E_u$ также компактно, и любая непрерывная функция на нем достигает своего минимального значения. Рассмотрим в качестве такой непрерывной функции расстояние до точки $P_{fix}^{(1)}, Q_{fix}^{(1)}$ (которая $\notin K \setminus E_u$). Пусть $Y^* = \left(P_{fix}^*, Q_{fix}^*\right)$ – точка $K \setminus E_u$, для которой это расстояние минимально. Рассмотрим отрезок I^*, соединяющий точки $P_{fix}^{(1)}, Q_{fix}^{(1)}$ и P_{fix}^*, Q_{fix}^*. Очевидно, что тогда все точки I^*, кроме Y^*, принадлежат E_u. Следовательно, согласно теореме 4, функция Ψ^{-1} определена и непрерывна на всем I^*, кроме его конца Y^*. Далее, поскольку при движении по I^* от $P_{fix}^{(1)}, Q_{fix}^{(1)}$ к P_{fix}^*, Q_{fix}^* все координаты не убывают, то согласно п.4а теоремы 4 все координаты функции Ψ^{-1} не убывают. При этом они ограничены сверху значениями $P_{fix}^{(2)}, P_{var}^{(2)}$. Но это значит, что Ψ^{-1} стремится к некоторому пределу P^* на I^* при стремлении аргумента к Y^*. Поскольку Ψ определена и непрерывна на всей области Ω^{N_V}, включая P^*, то $\Psi(P^*) = Y^*$, то есть P^* дает решение КЗП с исходными данными Y^*, что противоречит тому что $Y^* \in K \setminus E_u$. Пришли к противоречию – поэтому $K \setminus E_u = \emptyset$, что и требовалось доказать.

Теоремы о существовании решения КЗП

Теорема 6 (о существовании решения КЗП с критическим истечением).

Пусть G – связный граф с характеристиками всех ветвей из множества $\tilde{Z}_{ca}^2$для которого задана КЗП с неотрицательными заданными притоками ($Q_{fix} \ge 0$). Тогда такая КЗП всегда имеет решение (и притом единственное).

Доказательство теоремы 6.

Доказательство в целом аналогично доказательству подобной теоремы для цепей без критического течения [1]. Заметим, что единственность решения сразу следует из теоремы 2.

Доказательство проведем по индукции по числу ветвей N_E графа G. Фактически это доказательство описывает некоторый рекурсивный алгоритм поиска решения. Конечно, вряд ли он численно эффективен, но тем не менее успешно позволяет установить существование решения.

База индукции ($N_E = 1$). Для графов, состоящих из одной ветви (и 2 узлов), для вырожденного случая, когда задано давление в 2 узлах, КЗП имеет решение по определению. Для случая задания давления в одном узле и притока в другом, решение КЗП существует в силу того, что функции f_L и f_F для ветвей с характеристиками из $\tilde{Z}_a^2$ определены соответственно как минимум в областях $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ и $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ (см. раздел 2 статьи).

Шаг индукции. Пусть граф G имеет $N_E > 1$ ветвей и существование решения КЗП доказано для всех графов с числом ветвей меньше N_E. Рассмотрим граф $G' = Pcut(G)$ (см. [1]). Решение задачи КЗП на графе G эквивалентно ее решению на G'. Если последний несвязен и содержит несколько связных подграфов (Р-приведенных компонент), то каждый из них содержит меньше N_E ветвей, и следовательно КЗП на каждом из них имеет решение, а следовательно и КЗП на G'.

Остается случай, когда G' связен, и, следовательно, является Р-приведенным. Выберем в G' некоторый узел v' с заданным давлением $P_{fix}(v')$. Этот узел является висящим и соединен ветвью e' с некоторым узлом v'', являющимся узлом с заданным притоком $Q_{fix}(v'')$. Для упрощения дальнейших рассуждений поменяем, если требуется, направление ветви e', так чтобы она шла из узла v' в узел v''. Пусть G'' – граф, полученный из G' удалением узла v' и ветви e' (рис. 1). Он является связным и содержит $N_E - 1$ ветвь, то есть согласно предположению индукции на нем любая КЗП с неотрицательными притоками должна иметь решение. Возможны 2 варианта – 1) когда в графе G' есть только один узел с заданным давлением (а именно – узел v'); 2) когда в графе G' есть более одного узла с заданным давлением – и, следовательно, такие узлы есть в G''.

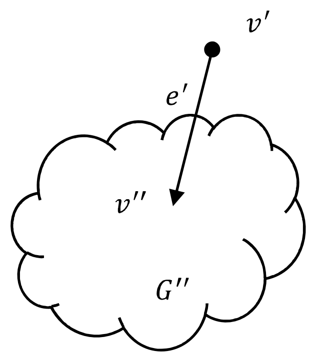

Рис. 1.

1-й вариант. В этом случае выполняем «прямой просчет» ветви e'. Из уравнения (4) в этом случае вытекает, что для искомого решения $Q(v') = -\sum_{v \in G', v \neq v'} Q_{fix}(v) \leq 0$. Поскольку узел v' висящий, примем расход на ветви e' равным $X(e') = Q(v')$ и рассчитаем давление в узле v'' по функции f_L для ветви e': $P(v'') = f_{e'L}\left(P_{fix}(v'), X(e')\right)$. Зададим на графе G'' КЗП с теми же условиями, что на G', но вместо притока в узле v'' зададим рассчитанное давление. Решение такой задачи на G'' существует, и вместе с заданным давлением в узле v' дает решением исходной КЗП на G'. Это очевидно для всех узлов, кроме v''. В узле v'' для найденного решения $Q(v'') = -\sum_{v \in G'', v \neq v''} Q_{fix}(v) - X(e') = -\sum_{v \in G'', v \neq v''} Q_{fix}(v) + \sum_{v \in G', v \neq v'} Q_{fix}(v) = Q_{fix}(v'')$, что и требовалось.

2-й вариант. В этом случае будем искать такое давление P'' в узле v'', чтобы решение КЗП на G'' (которое всегда существует по предположению индукции) с заданным давлением P'' и с теми же условиями в остальных узлах G'', что и на G', в комбинации с расходом по ветви e', соответствующим концевым давлениям $P_{fix}(v')$ и P'', обеспечивало решение исходной КЗП на G'. Чтобы подобное решение было решением исходной КЗП на G', требует только обеспечить заданный приток в узле v''. Соответствующее условие записывается в виде

$$Q_{G''\,var}(v''\,,P'') - \varphi_{e'}\big(P_{fix}(v'),P''\big) = Q_{fix}(v''),$$

где $\varphi_{e'}$ – функция φ – для ветви e', $Q_{G''\,var}(v''\,,P'')$ – приток в узле v'' для решения КЗП на G'' с заданным давлением P'' в узле v'' и теми же, что на G', условиями в остальных узлах G''.

Определим функцию $q(P'')$ следующим образом:

$$q(P'') = Q_{G''\,var}(v''\,,P'') - \varphi_{e'}\big(P_{fix}(v'),P''\big) - Q_{fix}(v'').$$

Изучим поведение функции $q(P'')$. Очевидно, функция с учетом предположения индукции $q(P'')$ определена на всей $\mathbb{R}$ и (с учетом теоремы 4) непрерывна по P''.

Пусть P''_{fix} – давление в узле v'' для решения на графе G'' КЗП с теми же заданными значениями в остальных узлах, что в исходной КЗП. Тогда в соответствии с теоремой 4 функция $Q_{G''\,var}(v''\,,P'')$ непрерывна и не убывает, и при этом (поскольку $Q_{fix}(v'') \geq 0$) при согласно следствию 2 теоремы 3 строго возрастает при $P'' \geq P''_{fix}$.

В соответствии с условиями на характеристики ветвей $-\varphi_{e'}\big(P_{fix}(v'),P''\big)$ как функция от P'' непрерывная и неубывающая по P'', причем она стремится к $+\infty$ при $P'' \to +\infty$, а при некоторых достаточно малых P'' принимает отрицательные значения. При этом при неотрицательных значениях она строго возрастает. Из всего вышесказанного очевидно, что всегда найдется такое достаточно малое $P'' < P''_{fix}$, при котором $Q_{G''\,var}(v''\,,P'') - Q_{fix}(v'') < 0$ и $-\varphi_{e'}\big(P_{fix}(v'),P''\big) < 0$, а следовательно и $q(P'') < 0$. Вместе с тем $q(P'')$ не убывает, а при неотрицательных значениях строго возрастает (когда хотя бы одно из слагаемых – $Q_{G''\,var}(v''\,,P'') - Q_{fix}(v'')$ и $-\varphi_{e'}\big(P_{fix}(v'),P''\big)$ – неотрицательно), и стремится к $+\infty$ при $P'' \to +\infty$. Следовательно, $q(P'')$ принимает в некоторой точке (и притом единственной!) нулевое значение. Эта точка и будет искомой величиной давления P''.

Отметим, что для цепей с критическим течением использование отрицательных давлений выглядит физически неестественно. Хотелось бы установить существование решений в области положительных давлений, и для некоторых случаев это возможно сделать.

Теорема 6а (о существовании решения КЗП для пассивной цепи с критическим истечением).

Пусть G – связный граф с характеристиками всех ветвей, определенными на $\Omega \times \Omega$, $\Omega = (P_{\min}, +\infty)$, $P_{\min} > 0$, все ветви которого пассивны и удовлетворяют условиям 1-3, 5, 6 списка А2С, для которого задана КЗП с неотрицательными заданными притоками ($Q_{fix} \geq 0$). Тогда такая КЗП всегда имеет решение (и притом единственное), причем $P_{var} \geq \min\limits_{v \in V_P} P_{fix}(v)$.

Доказательство теоремы 6а.

Доказательство в целом почти идентично доказательству теоремы 6. Поясним отличия.

Доказательстве базы индукции мы сразу получаем неравенство $P_{var} \geq \min\limits_{v \in V_P} P_{fix}(v)$ из-за пассивности ветви и не отрицательности притоков.

На шаге индукции при рассмотрении случая единственного узла с заданным давлением при «прямом просчете» давление не уменьшается, откуда получается неравенство на P_{var}.

Наконец, при рассмотрении основного случая давление P'' ищется на интервале между $P_{fix}(v')$ и P''_{fix}, поскольку при любом их соотношении функция $q(P'')$ в этих точках имеет разные знаки либо равна нулю.

Далее, если $P_{fix}(v') \geq P''_{fix}$, для узла v'' $P_{var}(v'') \geq P''_{fix}$, а P''_{fix} по предположению индукции не меньше минимального заданного давления на G'', а следовательно и на G. Для остальных же узлов с заданным притоком в G'' неравенство вытекает из предположения индукции и монотонности давлений в этих узлах при возрастании P''.

Если же $P_{fix}(v') < P''_{fix}$, то $P_{var}(v'') \geq P_{fix}(v')$, а для любого другого узла u графа G'' с заданным давлением из предположения индукции следует $P_{var}(u) \geq \min\left(\min\limits_{v \in V_P, v \neq v'} P_{fix}(v), P_{var}(v'')\right) \geq \min\limits_{v \in V_P} P_{fix}(v)$.

Частный случай КЗП, в которой заданные притоки $Q_{fix} = 0$, будем называть задачей расчета пропускной способности (ЗРПС).

Теорема 7 (о существовании решения задачи ЗРПС для пассивных цепей с критическим истечением)

Пусть G – связный граф пассивной гидравлической цепи с характеристиками ветвей, определенными на $\Omega \times \Omega$ (где $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ – некоторое непустое открытое связное множество), удовлетворяющими условиям 1, 2 и 3 списка А2С. Пусть на G задана КЗП с $Q_{fix} = 0$ и $P_{fix} \in \Omega^{N_P}$. Тогда решение КЗП существует, причем для него

$$P_{var} \in \left[\min(P_{fix}), \max(P_{fix})\right]^{N_Q}.$$

Доказательство теоремы 7.

Доказательство проводится полностью идентично доказательству аналогичной теоремы в [1].

Матрицы чувствительности и свойства матрицы Максвелла

Рассмотрим теперь ситуацию, когда замывающие соотношения ветвей непрерывно дифференцируемы в окрестности решения КЗП, выведем важнейшие матрицы чувствительности решения к исходным данным (аналогичные полученным в [9, 10, 11]), и посмотрим, как их свойства соответствуют установленным законам монотонности решения КЗП.

Обозначим $d_{Fi} = \partial\varphi_i(P_F, P_L)/\partial P_F$, $d_{Li} = -\partial\varphi_i(P_F, P_L)/\partial P_L$. Тогда в силу монотонности φ_i справедливы неравенства $d_{Fi} \geq 0$ и $d_{Li} \geq 0$. Далее мы будем рассматривать только «невырожденный» случай характеристик ветвей, когда производные отличны от нуля при докритическом течении, т.е. $d_{Fi} > 0$ и $d_{Li} > 0$. Для критического течения одна из этих производных равна нулю. Выберем направление ветви так, чтобы они были направлены в сторону критического течения (если оно есть на ветви). Тогда нулевыми на ветвях с критическим течением всегда будут d_{Li}.

Определим диагональные матрицы D_F и D_L с d_{Fi} и d_{Li} на диагонали. Тогда из уравнений (3) и (2) получаем

$$dX = (D_F A_F^T + D_L A_L^T)dP; \tag{7}$$

$$dQ = A(D_F A_F^T + D_L A_L^T)dP. \tag{8}$$

Очевидно, что для вырожденного случая $N_Q = 0$ решение непрерывно дифференцируемо. Рассмотрим случай $N_Q > 0$. Рассмотрим отображение $\Psi_{Pfix}: \Omega^{N_Q} \to \mathbb{R}^{N_Q}$, ставящее в соответствие давлениям P_{var} притоки Q_{fix}, рассчитанные по уравнениям (1) и (2) по P_{fix} и P_{var}. Отображение Ψ_{Pfix} является просто ограничением отображения Ψ.

Получим Якобиан отображения Ψ_{Pfix}. Для этого перенумеруем узлы графа так, чтобы сначала шли узлы с из V_Q (с заданным расходом), а затем из V_P (с заданным давлением) и разобьем вектора и матрицы на соответствующие блоки:

$$P = \begin{pmatrix} P_{var} \\ P_{fix} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_{fix} \\ Q_{var} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_Q \\ A_P \end{pmatrix}, A_F = \begin{pmatrix} A_{FQ} \\ A_{FP} \end{pmatrix}, A_L = \begin{pmatrix} A_{LQ} \\ A_{LP} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Тогда уравнения (7) и (8) запишутся в виде

$$dX = \left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right)dP_{var} + (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T)dP_{fix}; \tag{10}$$

$$dQ_{fix} = A_Q\left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right)dP_{var} + A_Q(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T)dP_{fix}; \tag{11}$$

$$dQ_{var} = A_P\left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right)dP_{var} + A_P(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T)dP_{fix}. \tag{12}$$

Матрица $\widetilde{M}$=$A_Q\left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right)$, связывающая dQ_{fix} и dP_{var} (называемая также модифицированной матрицей Максвелла), и есть матрица Якоби отображения Ψ_{Pfix}. Эта матрица обладает целым рядом замечательных свойств, которые рассматривались в [1]. Ниже мы обсудим, что происходит с ней в случае цепей с критическим течением. Пока лишь отметим, что в случае, когда матрица $\widetilde{M}$ всегда не вырождена, из теоремы о неявной функции следует, что все параметры решения КЗП являются локально непрерывно дифференцируемыми функциями исходных данных. Обозначим

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{PP} &= A_P(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T), \\ \widetilde{M}_{PQ} &= A_P\left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right), \\ \widetilde{M}_{QP} &= A_Q(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T). \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда, выражая из (11), (12) изменение параметров решения через изменение исходных данных, получим

$$dP_{var} = \widetilde{M}^{-1} dQ_{fix} - \widetilde{M}^{-1}\widetilde{M}_{QP} dP_{fix}\,, \tag{14}$$

$$dQ_{var} = \widetilde{M}_{PQ}\widetilde{M}^{-1} dQ_{fix} + \left(\widetilde{M}_{PP} - \widetilde{M}_{PQ}\widetilde{M}^{-1}\widetilde{M}_{QP}\right) dP_{fix}\,. \tag{15}$$

Уравнения (14), (15) дают основные матрицы чувствительности нашей задачи. Для «традиционных» цепей они совпадают с полученными в [9, 10, 11].

Изучим теперь свойства полученных матриц, прежде всего – модифицированной матрицы Максвелла. Запишем последнюю в виде

$$\widetilde{M}=A_Q\left(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T\right) = A_{FQ} D_F A_{FQ}^T + A_{LQ} D_L A_{LQ}^T + A_{LQ} D_F A_{FQ}^T + A_{FQ} D_L A_{LQ}^T.$$

Матрицы $A_{FQ} D_F A_{FQ}^T$ и $A_{LQ} D_L A_{LQ}^T$ – диагональные. Первая содержит в i-й ячейке диагонали (соответствующей i-му узлу V_Q) сумму d_F всех выходящих из узла ветвей вторая – сумму d_L всех входящих в узел ветвей. Матрица $A_{FQ} D_L A_{LQ}^T$ в i-й строке и j-м столбце содержит сумму $-d_L$ всех ветвей, выходящих из узла i и входящих в узел j, а матрица $A_{LQ} D_F A_{FQ}^T$ – сумму $-d_F$ всех ветвей, входящих в узел i и выходящих из j. В итоге матрица $\widetilde{M}$ содержит на диагонали сумму d_F всех выходящих из узла и сумму d_L всех входящих в узел ветвей (кроме ветвей-петель); недиагональный элемент m_{ij} содержит сумму величин для всех соединяющих вершины i и j ветвей: $-d_L$ для ветвей из i-го узла в j-й и $-d_F$ для ветвей из j-го узла в i-й.

Матрица $\widetilde{M}_{PP}$ имеет такую же структуру, как $\widetilde{M}$, но только для узлов V_P.

Для матриц $\widetilde{M}_{QP}$ и $\widetilde{M}_{PQ}$ имеем $\widetilde{M}_{QP} = A_{FQ} D_F A_{FP}^T + A_{LQ} D_L A_{LP}^T + A_{FQ} D_L A_{LP}^T + A_{LQ} D_F A_{FP}^T$ и $\widetilde{M}_{PQ} = A_{FP} D_F A_{FQ}^T + A_{LP} D_L A_{LQ}^T + A_{FP} D_L A_{LQ}^T + A_{LP} D_F A_{FQ}^T$. Первые 2 слагаемых в обоих выражениях равны нулю, и в итоге обе матрицы содержат в ячейке ij сумму величин, соединяющих узлы i и j: $-d_L$ для ветвей из i-го узла в j-й и $-d_F$ для ветвей из j-го узла в i-й. При этом $\widetilde{M}_{PQ} = \widetilde{M}_{QP}^T$.

Прежде всего, $\widetilde{M}$ по-прежнему является матрицей со слабым диагональным преобладанием по столбцам. При этом строгое диагональное преобладание имеет место в столбцах, соответствующим узлам, соединенным ветвями с узлами из V_P (которые дают дополнительный вклад в диагональные элементы), причем только в тех из них, для которых есть хотя бы одна такая ветвь с докритическим течением или критическим течением в сторону V_P. Это делает матрицу $\widetilde{M}$ принадлежащей классу WCDD (Weakly Chained Diagonally Dominant) в том и только в том случае, когда выполнено условие $\mathcal{R}_{G^c}^{-1}(V_P) = V$, которое, как мы уже знаем, и является необходимым и достаточным условием единственности решения КЗП. Если матрица принадлежит классу WCDD, то она невырождена (в российской литературе на этот факт принято ссылаться как на обобщение теоремы Ольги Тауски [12]).

Одновременно матрица $\widetilde{M}$ является L-матрицей, то есть матрицей, чьи диагональные элементы положительны, а не диагональные элементы отрицательны или равны нулю. Известно ([13]), что все матрицы, одновременно относящие к классам WCDD и L, являются невырожденными M-матрицами (матрицами с неположительными не диагональными элементами, действительная часть собственных значений которых положительна). Как уже отмечалось в [1], этот класс матриц привлекает в последние годы большое внимание и возникает в разнообразных областях математики (дифференциальных уравнениях, марковских цепях и др. [14]). В частности, для них установлено много полезных оценок для их определителя и различных норм (см., например, [15, 16]). M-матрицы монотонны – в частности, обратные к ним матрицы содержат только неотрицательные элементы.

Изучим более детально свойства и структуру обратной модифицированной матрицы Максвелла $\widetilde{M}^{-1}$ для цепей с критическим течением, следуя тому же подходу, что и в [1].

Невырожденная M-матрица $\widetilde{M}$ с учетом теоремы Перрона-Фробениуса может быть представлена в виде [14] $\widetilde{M} = sI - B$, где I – единичная матрица, матрица B неотрицательна ($B \geq 0$), а s больше спектрального радиуса матрицы B ($s > \rho(B)$). Тогда обратная матрица может быть представлена в виде

$$\widetilde{M}^{-1} = s^{-1}\left[I + \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} B^i\right]. \tag{16}$$

При этом ряд в (16) сходится в силу неравенства $\rho(s^{-1}B) < 1$.

Очевидно, что все элементы матрицы $\widetilde{M}^{-1}$ неотрицательны, причем все диагональные элементы положительны. Какие именно не диагональные элементы положительны? Очевидно, в матрице B положительны те, и только те не диагональные элементы в ячейке ij, которые отрицательны в матрице $\widetilde{M}$ – то есть соответствующие узлам, соединенным ветвью, течение по которой не является критическим в направлении из узла i в узел j, т.е. проходимым из узла j в i в графе G^c. В матрице B^i положительны все не диагональные элементы, соответствующие узлам, соединенным проходимыми в сторону начального узла в G^c путями из i ветвей со всеми узлами в V_Q (а, также, возможно, и часть элементов, соединенных путем из меньшего количества ветвей – это зависит от диагональных элементов матрицы B). В итоге из формулы (16) получаем, что в матрице $\widetilde{M}^{-1}$ положительны те, и только те элементы, которые соответствуют паре узлов v и u, для которых $v \in \hat{\mathcal{R}}_{G^c}(u)$.

Перенумеруем узлы V_Q таким образом, чтобы узлы из каждого Р-компонента шли подряд. Тогда матрицы $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}^{-1}$ примут вид блочно-диагональных – каждый блок соответствует невырожденному (содержащему узлы из V_Q) Р-компоненту. Поскольку узлы V_Q в каждом Р-компоненте образуют связный подграф, тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 8 (об обратной матрице Максвелла для цепей с критическим течением)

Обратная модифицированная матрица Максвелла $\widetilde{M}^{-1}$ имеет блочно-диагональную структуру, соответствующую невырожденным Р-компонентам графа, причем элементы каждого блока диагонального блока положительны, если для соответствующих им узлов $v \in \hat{\mathcal{R}}_{G^c}(u)$.

Из теоремы 8 теперь, точно так же, как и в [1], легко устанавливается соответствие между доказанными ранее свойствами монотонности решения КЗП и знаками коэффициентов матриц влияния.

Литература

1. **Корельштейн Л.Б.** Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями // Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2018. – С. 55–85.

2. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Приложение теории двойственности к задачам потокораспределения // Вычислительные технологии, 2009. – Т. 14, № 1. – С. 67–79.

3. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Задача потокораспределения в неклассической постановке // Сибирский журнал индустриальной математики, 2010. – Т. 13, № 4. – С. 15–24.

4. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Применение теории двойственности при моделировании гидравлических систем с регуляторами расхода // Известия ВУЗов. Математика, 2010. – № 9. – С. 76–81.

5. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Задача потокораспределения с нефиксированными расходами в узлах // Кибернетика и системный анализ, 2011. – № 1. – С. 81–92.

6. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С.** Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения при ограничениях-неравенствах на переменные // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 144–158.

7. **K. Jittorntrum.** An Implicit Function Theorem // Journal of optimization theory and applications. 1978, Vol. 25, № 4, pp. 575–577.

8. **S. Kumagai.** An Implicit Function Theorem: Comment // Journal of optimization theory and applications. 1980, Vol. 31, № 2, pp. 285–288.

9. **Епифанов С.П., Новицкий Н.Н.** Модели чувствительности гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами и их применение для анализа управляемости трубопроводных систем // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2007. – С. 27–47.

10. **Боровин Д.И., Епифанов С.П., Новицкий Н.Н.** Развитие моделей и методов анализа чувствительности гидравлических цепей // Тр. XII Всеросс. науч. семинара. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010. – С. 93–102.

11. **Епифанов С.П., Новицкий Н.Н., Боровин Д.И.** Развитие моделей и методов анализа чувствительности гидравлических цепей // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 288 – 294.

12. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.

13. **Parsiad Azimzadeh.** A fast and stable test to check if a weakly diagonally dominant matrix is an M-matrix. https://arxiv.org/pdf/1701.06951.pdf

14. **Plemmons R.J.** M-Matrix Characterization. I – Nonsingular M-Matrices // Linear Algebra and Its Applications, 1977, Vol.18, pp. 175–188.

15. **Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сибирский математический журнал, 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1248–1254.

16. **Wen Li, Yanmei Chen.** Some new two-side bounds for determinants of diagonally dominant matrices // Journal of Inequalities and Applications, 2012, № 1.