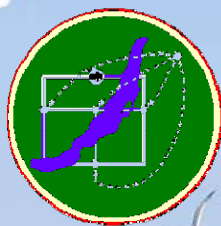




Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН



**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ
АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА
РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

ТРУДЫ

XVI Всероссийского научного семинара

г. Иркутск

26 июня – 02 июля 2018 г.

**Иркутск
2018**

ФГБУН Институт Систем Энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН

XVI Всероссийский научный семинар

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА РАЗВИВАЮЩИХСЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Труды семинара

26 июня – 02 июля 2018 г.

г. Иркутск

Иркутск
2018

УДК 519.6+519.8

Труды XVI Всеросс. научн. семин. «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем». Иркутск, 26 июня – 02 июля 2018 г. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2018. – 366 с.

ISBN 978-5-93908-166-5.

В сборнике научных трудов обсуждаются актуальные проблемы математического моделирования трубопроводных систем (ТПС) энергетики – тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения, а также развития методов теории гидравлических цепей, имеющих межотраслевое значение.

Сборник предназначен для сотрудников научно-исследовательских, проектных и производственных организаций, преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

Ответственный за выпуск: к.т.н. Токарев Вячеслав Вадимович

Без объявления.

ISBN 978-5-93908-166-5

© Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2018

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И МОНОТОННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДАВЛЕНИЯ ЗАМЫКАЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ

Корельштейн Л.Б. (ООО «НТП Трубопровод»)

В статье доказывается существование и единственность решения классической задачи потокораспределения в гидравлических цепях с ветвями, имеющими зависящие от давления характеристики (замыкающие соотношения), в том числе при ограничениях на величину узловых давлений. При этом вид характеристик ветвей ограничен только условиями, необходимыми для обеспечения существования и единственности решения задачи потокораспределения для каждой отдельной ветви (непрерывность и монотонность), а также непрерывности такого решения. Показано, что при этом гидравлическая цепь в целом «наследует» монотонность и непрерывность поведения своих ветвей, что и обеспечивает существование и единственность решения. Установлены также некоторые свойства матрицы Максвелла гидравлической цепи, связанные со свойствами монотонности решения.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях всегда вызывал интерес исследователей, занимающихся расчетами трубопроводных систем. В его исследование внесли вклад как отечественные (Б.Н. Пшеничный [1]), так и зарубежные (М. Collings и др. [2], а также недавняя статья [3]) специалисты. Этот вопрос всесторонне рассматривался основоположниками теории гидравлических цепей А.П. Меренковым и В.Я. Хасилевым [4], и М.Г. Сухаревым [5, 6]. Последние результаты по этому вопросу были получены С.П. Епифановым и В.И. Зоркальцевым, которым удалось установить существование и единственность решения при наиболее общих предположениях о характеристиках ветвей как для классической задачи потокораспределения [7], так для целого ряда расширенных или неклассических задач [8, 9, 10, 11]. Во всех перечисленных выше случаях был использован экстремальный подход – задача сводилась к поиску минимума строго выпуклой функции, что и обеспечивало существование и единственность решения.

Тем не менее все перечисленные выше результаты получены в предположении, что расходы по ветвям цепи зависят только от разности потенциалов (давлений) на концах ветвей, но не от величины самих давлений. Такое предположение вполне правомерно для течения несжимаемой жидкости при изотермических условиях, однако во многих случаях не применимо при течении реальных газов и тем более двухфазных газожидкостных потоков при изотермических или адиабатических условиях, когда теплофизические свойства продукта сильно зависят от давления. При

этом для гидравлических цепей с зависящими от давления замыкающими соотношениями, как отмечено в статье М.Г. Сухарева [6], использовать экстремальный поход (по крайней мере пока) не удастся. Тем не менее для таких сетей, как правило, можно эффективно использовать обобщения классических методов решения для «традиционных» гидравлических сетей (такие обобщения предложены, в частности, в работах Е.А. Михайловского и Н.Н. Новицкого [12–14]). Однако отсутствие строгого математического доказательства предложенных при этом условий существования и единственности решения оставляло (по крайней мере у автора) чувство неудовлетворенности – тем более что уже давно известно, что в весьма схожих задачах неизотермического течения, в особенности двухфазных продуктов, возможны случаи не единственности решения!

Оказывается, для подобных цепей огромную роль играют свойства монотонности (они изучались в недавних работах М. Черткова – например [15]). Изучая их, автору удалось доказать существование и единственность решения классической задачи потокораспределения для подобных цепей при самых общих ограничениях на характеристики ветвей, прямо обобщающих аналогичные ограничения в работах С.П. Епифанова и В.И. Зоркальцева [7–11].

Уже после написания первого варианта статьи автор обнаружил, что связь между монотонностью решения для гидравлической цепи, и существованием и единственностью решения была открыта почти 60 лет назад сначала знаменитым исследователем в области теории гидравлических цепей G. Birkhoff [16] и его коллегой В. Kellogg, а затем в более общем виде – известным математиком W. C. Rheinboldt [17]. Последний установил ее для наиболее общего случая «абстрактных» сетей в рамках изучения классов многомерных отображений, соответствующих различным типам матриц. Поразительно, но эти результаты оказались совершенно не замечены специалистами по гидравлическим цепям (за исключением работ [18, 19] того же времени) и незаслуженно забыты. Автор надеется, что данная статья послужит восстановлению исторической справедливости, и данные идеи станут неотъемлемой частью теории гидравлических цепей.

Постановка задачи и ограничения на характеристики ветвей

Пусть G – ориентированный граф с N_V узлами (образующими множество узлов V) и N_E ветвями (образующими множество ветвей E). Расход X_i по i -й ветви связан с начальным и конечным давлениями P_{Fi} и P_{Li} замыкающим соотношением

$$X_i = \varphi_i(P_{Fi}, P_{Li}). \quad (1)$$

Пусть A – матрица инцидентности графа G ($a_{ij} = 1$, если ребро j начинается в узле i ; $a_{ij} = -1$, если ребро j заканчивается в узле i ; $a_{ij} = 0$ в остальных случаях); Q – вектор узловых притоков. Тогда уравнения Кирхгофа (уравнения балансов в узлах) записываются в виде

$$AX = Q. \quad (2)$$

Используя матрицы A_F и A_L , соответствующие выходящим и входящим ветвям ($A = A_F + A_L$), вектор узловых давлений P и вектор Φ функций φ_i , уравнения (1) можно записать в виде

$$X = \Phi(P_F, P_L), \quad P_F = A_F^T P, \quad P_L = -A_L^T P. \quad (3)$$

Таким образом, имеем $N_V + N_E$ уравнений для $2N_V + N_E$ неизвестных (P , Q и X). При этом, как известно, уравнения (2) не являются независимыми – для связного графа G матрица A имеет ранг $N_V - 1$, при этом притоки в узлах удовлетворяют дополнительному уравнению баланса:

$$\sum_{i=1}^{N_V} Q_i = 0. \quad (4)$$

Как видим, для связного графа G неизвестных на N_V больше, чем независимых уравнений, поэтому, чтобы задача была определенной, должны быть заданы значения N_V неизвестных.

В классической задаче потокораспределения (КЗП) задается вектор давлений P_{fix} в $N_P > 0$ узлах (образующих множество V_P) и вектор притоков Q_{fix} в остальных $N_Q = N_V - N_P$ узлах (образующих множество V_Q), при этом требуется найти давления P_{var} в остальных N_Q узлах, расходы по ветвям X и притоки Q_{var} в N_P узлах с заданным давлением. Последние определяются по уравнениям (1) и (2), так что найти, по существу, достаточно давления P_{var} в узлах с заданными притоками.

Для «традиционных» гидравлических цепей функции φ_i зависят только от разности давлений: $X_i = \varphi_i(P_{Fi} - P_{Li})$. В работе [7] сформулированы условия для функций φ_i (или обратных к ним функций f_i), при которых решение КЗП для «традиционных» гидравлических цепей гарантированно существует и единственно, а именно (Условия А):

- 1) Непрерывность;
- 2) Строгое монотонное возрастание;
- 3) Определенность на всем множестве действительных чисел \mathbb{R} ;
- 4) Совпадение области значений с \mathbb{R} , что с учетом монотонности эквивалентно условиям $\varphi_i(y) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow +\infty$ и $\varphi_i(y) \rightarrow -\infty$ при $y \rightarrow -\infty$.

Строгая монотонность функции необходима для обеспечения единственности решения; непрерывность и возрастание вытекают из физических соображений. Эти условия почти всегда реализуются на практике.

А вот условия 3) и 4) являются только удобной математической экстраполяцией, призванной обеспечить существование решения при любых заданных давлениях и узловых притоках – на самом деле на практике область значений давлений всегда ограничена – почти всегда снизу (обычно как минимум положительностью абсолютных давлений), а часто и сверху (технологическими ограничениями, прочностью конструкции и т. д.), а соответственно ограничены и величины возможных расходов и узловых притоков. Поэтому (как отмечено и в [10]) на практике желательно иметь оценки границ величин заданных узловых давлений и узловых притоков, при которых задача заведомо имеет решение в рамках заданных границ изменения аргументов функций φ_i и f_i . Это, однако, самостоятельная (весьма практически важная и непростая) задача.

Множество функций, удовлетворяющих описанным выше условиям 1) – 4), обозначим как \tilde{Z}_a . Оно отличается от введенного в [7–10] множества \tilde{Z} только отсутствием условия равенства нулю в нуле. Множество функций \tilde{Z}_a получается из \tilde{Z} прибавлением к функциям произвольной постоянной. Функции из \tilde{Z} представляют собой так называемые пассивные ветви (без напора), а функции из \tilde{Z}_a включают в себя и активные ветви (с перепадом высот, насосами, компрессорами и т.п.).

Определим теперь множество допустимых функций \tilde{Z}_a^2 для зависящих от давления замыкающих соотношений. Оно представляет собой естественное обобщение множества \tilde{Z}_a . Функция $\varphi \in \tilde{Z}_a^2$, если выполняются следующие условия (Условия А2):

- 1) $\varphi(P_F, P_L)$ является непрерывной функцией двух переменных P_F, P_L ;
- 2) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_F строго убывает по P_L ;
- 3) $\varphi(P_F, P_L)$ при любом значении P_L строго возрастает по P_F ;
- 4) $\varphi(P_F, P_L)$ определена на всем \mathbb{R}^2 ;
- 5) При любом P_F $\varphi(P_F, P_L) \rightarrow -\infty$ при $P_L \rightarrow +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \rightarrow +\infty$ при $P_L \rightarrow -\infty$;
- 6) При любом P_L $\varphi(P_F, P_L) \rightarrow +\infty$ при $P_F \rightarrow +\infty$ и $\varphi(P_F, P_L) \rightarrow -\infty$ при $P_F \rightarrow -\infty$.

Иначе говоря, множество \tilde{Z}_a^2 составляют непрерывные функции, которые при любом P_L принадлежат \tilde{Z}_a как функции от P_F и при любом P_F принадлежат $-\tilde{Z}_a$ как функции от P_L .

В [12–14] приведен ряд примеров принадлежащих множеству \tilde{Z}_a^2 функций (описывающих характеристики газоперекачивающих агрегатов).

Так же, как и в случае множества \tilde{Z}_a , условия 1) – 3) основываются на физических соображениях – а условия 4) – 6) являются математической экстраполяцией.

Определим подмножество функций \tilde{Z}^2 множества \tilde{Z}_a^2 , как функции, для которых $\varphi(P, P) = 0$ при любом P . Функции из \tilde{Z}^2 представляют собой характеристики пассивных ветвей, а \tilde{Z}_a^2 включают и активные ветви.

Заметим, что любая зависящая только от разности давлений характеристика ветви, удовлетворяющая какому-либо условию из списка А, удовлетворяет и соответствующему условию(ям) из списка А2. Тем самым все установленные далее результаты будут справедливы и для «традиционных» гидравлических цепей.

Заметим, что само по себе введение функций $\varphi(P_F, P_L)$, однозначно определяющих расход по ветви в зависимости от конечных давлений, является определенным допущением. Существуют ситуации, когда расход не может быть определен однозначно – например, для центробежных насосов с немонотонной расходно-напорной характеристикой. В этом случае течение, как правило, неустойчиво (например, так называемый режим помпажа насосов).

Вспомогательные определения и свойства

Прежде всего получим некоторые вспомогательные результаты, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

Установим некоторые свойства функций из множества \tilde{Z}_a^2 .

Пусть $\varphi \in \tilde{Z}_a^2$. Тогда уравнения $\varphi(P_F, P) - X = 0$ и $\varphi(P, P_L) - X = 0$ относительно P определяют неявные функции $f_L(P_F, X)$ и $f_F(P_L, X)$, которые рассчитывают давление в конце ветви по давлению в начале и расходу, и наоборот, давление в начале ветви по давлению в конце и расходу. Легко видеть, что в силу определения \tilde{Z}_a^2 эти функции определены на всем множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, монотонны по обоим параметрам (первая монотонно возрастает по давлению в начале ветви и монотонно убывает по расходу; вторая монотонно возрастает по обоим аргументам), и стремятся к бесконечности при стремлении к бесконечности любого из аргументов. Менее тривиальным фактом является то, что эти функции также непрерывны по **обеим** переменным. Последнее вытекает из строгой монотонности функций $\varphi(P_F, P) - X$ и $\varphi(P, P_L) - X$ по P , и специального «недифференциального» варианта теоремы о неявной функции, предложенного К. Jittorntrum [20] и окончательно доказанного S. Kumagai [21] (формулировку данного варианта см. в Приложении 1).

Заметим также, что направление любого ребра в нашей постановке задачи задано исключительно для удобства записи уравнений (чтобы условиться, в каком направлении расход считается положительным). Для удобства направление ребра всегда можно поменять, определив замыкающее

соотношение для ребра с обращенным направлением $\varphi^*(P_F, P_L) = -\varphi(P_L, P_F)$.

Пусть G – связный граф, на котором задана КЗП. Определим следующее преобразование (назовем его P -приведением, или $Pcut$) – рассмотрим все узлы с заданным давлением, и те из них, которые имеют степень >1 , разделим, разъединив сходящиеся в них ветви и задав в их концевых узлах то же давление, что в исходном узле (рис. 1). Прделав данную операцию со всеми такими узлами, получим граф $Pcut(G)$, в котором все узлы с заданным давлением висят, т.е. имеют степень 1 (см. пример на рис. 2). Граф $Pcut(G)$ может оказаться несвязным, пусть G_{iP} – связные подграфы, из которых он состоит, а G_i – те подграфы, из которых они получаются (см. пример на рис.2). Будем называть подграфы G_i – P -компонентами графа G , а G_{iP} – его P -приведенными компонентами. P -компоненты графа пересекаются друг с другом только по узлам с заданным давлением, в которых они соединены. Будем называть граф G^* P -приведенным, если он связный, и $Pcut(G^*) = G^*$.

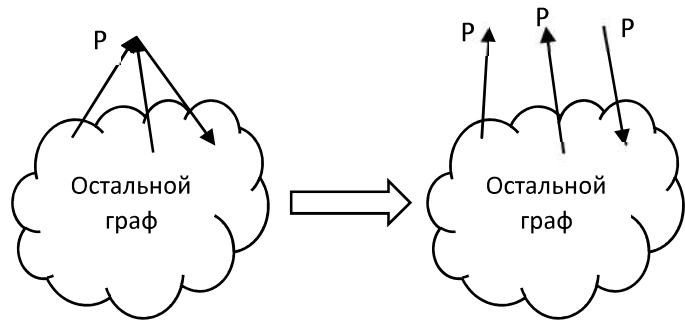


Рис. 1.

Прделав данную операцию со всеми такими узлами, получим граф $Pcut(G)$, в котором все узлы с заданным давлением висят, т.е. имеют степень 1 (см. пример на рис. 2). Граф $Pcut(G)$ может оказаться несвязным, пусть G_{iP} – связные подграфы, из которых он состоит, а G_i – те подграфы, из которых они получаются (см. пример на рис.2). Будем называть подграфы G_i – P -компонентами графа G , а G_{iP} – его P -приведенными компонентами. P -компоненты графа пересекаются друг с другом только по узлам с заданным давлением, в которых они соединены. Будем называть граф G^* P -приведенным, если он связный, и $Pcut(G^*) = G^*$.

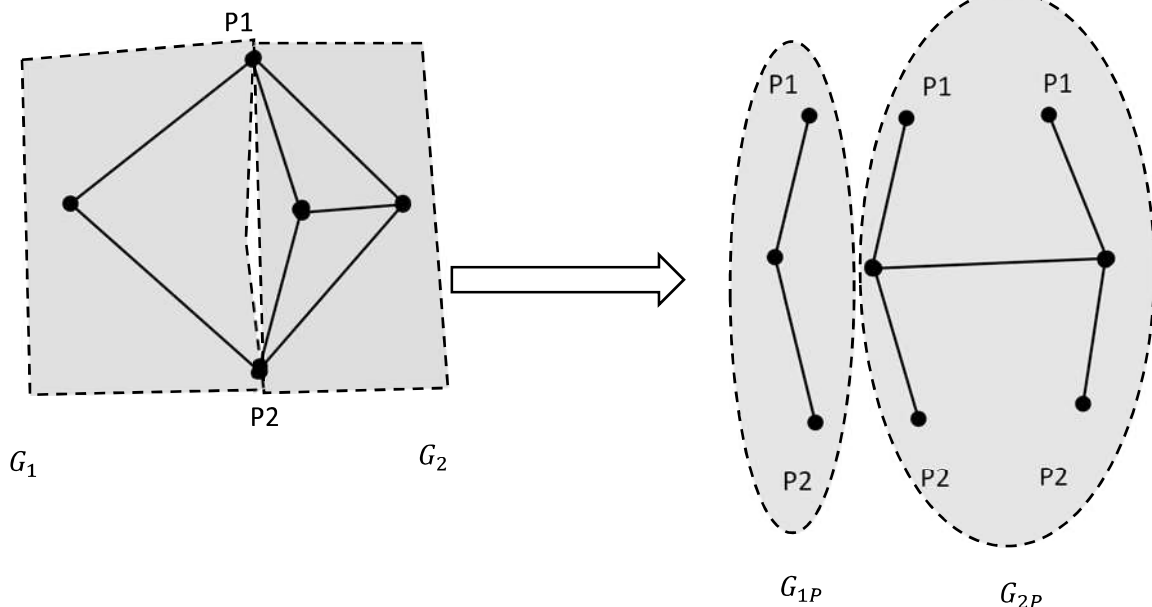


Рис. 2.

Очевидно, что решение КЗП для графа G эквивалентно ее решению для всех графов G_i или получающихся из них G_{iP} (все результаты решения КЗП совпадают с результатами решения в соответствующих P -компонентов – кроме притоков в узлах с заданным давлением, которые по-

лучаются как сумма соответствующих притоков по тем P -компонентам, где соответствующие узлы содержатся). При этом исходные параметры КЗП влияют на решение лишь локально – то есть изменение заданного в узле притока или заданного в узле давления влияет только в пределах тех P -компонент, в которые данный узел входит. В случае узла с заданным давлением это единственная P -компонента, для узла с заданным давлением их может быть несколько. Иными словами, узлы с заданным давлением делят граф на не влияющие друг на друга фрагменты.

При этом P -приведенные графы имеют следующую структуру (облегчающую анализ) – они либо представляют собой отдельную ветвь с заданными концевыми давлениями, либо связный подграф из узлов с заданными расходами и соединяющими их ветвями, с которым дополнительно соединены висящие узлы с заданным давлением. P -компоненты графа имеют такую же структуру, только в них узлы с заданным давлением могут быть не висящими.

Учитывая все сказанное выше, часто бывает удобно изучать свойства решения КЗП для P -приведенных графов – после чего полученные результаты легко обобщаются на случай произвольного связного графа.

Единственность и свойства монотонности решения КЗП

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ – некоторое непустое открытое связное множество, и все функции φ_i определены на $\Omega \times \Omega$. В качестве Ω может выступать \mathbb{R} , либо полупрямая, либо открытый интервал (ограниченный нижней и верхней границами давления). Рассмотрим сначала функции φ_i , удовлетворяющие условиям монотонности (строгому возрастанию по начальному давлению и строгому убыванию по конечному), не будем пока накладывать на них даже условия непрерывности! Оказывается, уже и условий монотонности характеристик ветвей достаточно для обеспечения единственности и свойств монотонности решения КЗП.

Пусть $P \in \Omega^{N_v}$ – вектор узловых давлений. Тогда уравнения (1) и (2) полностью определяют расходы по ветвям и притоки в узлах. Изучим, как меняются притоки в узлах при изменении узловых давлений.

Лемма 1 (о притоках в узлах).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющим условиям строгой монотонности, P^1 и P^2 – векторы узловых давлений, X^1, X^2, Q^1, Q^2 – определенные по уравнениям (1) и (2) соответствующие векторы расходов и узловых притоков. Определим множества узлов следующим образом:

V^+ – множество тех узлов, для которых $P_i^2 > P_i^1$ (давление увеличилось);

V^- – множество тех узлов, для которых $P_i^2 < P_i^1$ (давление уменьшилось);

V^0 – множество тех узлов, для которых $P_i^2 = P_i^1$ (давление не изменилось);
 V^{0+} – подмножество тех узлов V^0 , которые соединены ветвью(ями) с узлом из V^+ , но не соединены с узлами из V^- ;
 V^{0-} – подмножество тех узлов V^0 , которые соединены ветвью(ями) с узлом из V^- , но не соединены с узлами из V^+ ;
 $V^{0\pm}$ – подмножество тех узлов V^0 , которые соединены ветвями с узлом(ами) и из V^+ , и из V^- ;
 V^{00} – подмножество тех узлов V^0 , которые не соединены ветвями с узлами из V^+ или V^- (то есть соединены только с узлами из V^0).

Тогда:

1. Для любого узла $v \in V^{00}$ $Q^2(v) = Q^1(v)$ (приток не изменился).
2. Для любого узла $v \in V^{0+}$ $Q^2(v) < Q^1(v)$ (приток уменьшился).
3. Для любого узла $v \in V^{0-}$ $Q^2(v) > Q^1(v)$ (приток увеличился).
4. Если $V^+ \neq \emptyset$ и $V^+ \neq V$, то $\sum_{v \in V^+} Q^2(v) > \sum_{v \in V^+} Q^1(v)$ (общий приток вырос).
5. Если $V^- \neq \emptyset$ и $V^- \neq V$, то $\sum_{v \in V^-} Q^2(v) < \sum_{v \in V^-} Q^1(v)$ (общий приток уменьшился).

Заметим, что про притоки в узлах из $V^{0\pm}$ априори ничего сказать нельзя.

Доказательство Леммы 1.

Пусть v – узел графа. Для упрощения дальнейших рассуждений поменяем направления инцидентных ему ветвей так, чтобы они начинались в узле v . В соответствии с уравнением (1) приток $Q(v)$ в узле v тогда равен сумме расходов по всем соединенным с ним ветвям.

Если $v \in V^{00}$, то для всех соединенных с v ветвей концевые давления P_i^2 совпадают с P_i^1 , поэтому совпадают и расходы по ветвям, а следовательно $Q^2(v) = Q^1(v)$.

Если $v \in V^{0+}$, то у исходящих из v ветвей начальные давления не меняются ($P^2(v) = P^1(v)$), а давления в конечных узлах v_L либо также не меняются ($P^2(v_L) = P^1(v_L)$), либо увеличиваются ($P^2(v_L) > P^1(v_L)$). В первом случае расход по ветвям не меняется, во втором случае (из-за монотонности характеристики ветви) уменьшится. Поскольку $v \in V^{0+}$, есть не менее одной ветви, по которой расход стал меньше. Следовательно, $Q^2(v) < Q^1(v)$. 3-й пункт леммы доказывается аналогично.

Пусть $V^+ \neq \emptyset$ и $V^+ \neq V$. Сложим уравнения все уравнения Кирхгофа (1), соответствующие узлам из V^+ . В полученной сумме потоки по ветвям, соединяющим узлы из V^+ , взаимно компенсируются. Поскольку $V^+ \neq V$ и граф связный, множество ветвей, связывающих узлы из V^+ с остальными узлами (из $V \setminus V^+$), не пусто. Для простоты рассуждений переориентируем их, если нужно, так, чтобы начальные узлы все лежали в V^+ , а конечные в

$V \setminus V^+$. Тогда сумма притоков по всем узлам V^+ равна сумме расходов по всем ветвям из V^+ «вовне» $\sum_{v \in V^+} Q(v) = \sum_{v \in V^+, u \in V \setminus V^+} X(e_{vu})$. На каждой из таких ветвей при переходе от P^1 к P^2 начальное давление увеличилось, а конечное либо уменьшилось, либо не изменилось. Поскольку характеристики этих ветвей монотонны, на каждой из них расход увеличился, а, следовательно, увеличилась и сумма расходов – что и доказывает пункт 4 леммы. Пункт 5 леммы доказывается аналогично.

Теперь мы можем установить свойства решения КЗП, вытекающие из монотонности характеристик ветвей.

Теорема 1 (о единственности решения КЗП).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности. Тогда для него решение задачи КЗП единственно.

Доказательство Теоремы 1.

В вырожденном случае, когда $N_P = N_V$, теорема выполнена автоматически.

Рассмотрим случай $0 < N_P < N_V$, когда есть и узлы с заданными давлениями, и узлы с заданными притоками (т.е. $V_P \neq \emptyset$ и $V_Q \neq \emptyset$). Допустим, что для одних и тех же множеств V_P и V_Q и одних и тех же заданных узловых давлениях и притоках есть 2 разных решения КЗП (обозначим их индексами 1 и 2). Тогда эти решения должны отличаться вектором узловых давлений. Применим лемму 1. Поскольку в узлах V_P давления фиксированы, $V^+ \subseteq V_Q$, следовательно $V^+ \neq V$. Аналогично $V^- \subseteq V_Q$, и следовательно $V^- \neq V$. Если $V^+ \neq \emptyset$, то согласно пункту 4 леммы 1 $\sum_{v \in V^+} Q^2(v) > \sum_{v \in V^+} Q^1(v)$. Но это невозможно, так как $V^+ \subseteq V_Q$, а все притоки в узлах V_Q заданы и не меняются. Следовательно, $V^+ = \emptyset$. Аналогичным образом доказывается, что и $V^- = \emptyset$. Но это означает, что $V^0 = V$, то есть узловые давления решений 1 и 2 совпадают, а, следовательно, совпадают и расходы и узловые притоки. Теорема 1 доказана.

Изучим теперь, как влияет на решение КЗП изменение исходных данных – заданных давлений и узловых притоков. Следующие теоремы обобщают на случай цепей с зависящими от давлений замыкающими соотношениями теоремы монотонности, установленные в [15] для «классических» цепей.

Теорема 2 (о монотонности решения КЗП).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности, на котором заданы 2 задачи КЗП (задача 1 и 2) с совпадающими непустыми множествами V_P и V_Q , и задан-

ными давлениями $P_{fix}^{(1)}$ и $P_{fix}^{(2)}$ и заданными притоками $Q_{fix}^{(1)}$ и $Q_{fix}^{(2)}$, причем $P_{fix}^{(1)} \leq P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \leq Q_{fix}^{(2)}$, и решения обеих задач существуют. Обозначим V_P^+ и V_Q^+ множества узлов с заданными давлениями и притоками, для которых неравенство между исходными данными строгое. Тогда:

1. Во всех Р-компонентах G , где есть узлы из V_P^+ или V_Q^+ , во всех узлах $v \in V_Q$ $P^2(v) > P^1(v)$. В остальных Р-компонентах во всех узлах $v \in V_Q$ $P^2(v) = P^1(v)$.
2. Если $N_P = 1$ и $V_Q^+ \neq \emptyset$, то в единственном узле v с заданным давлением $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$, иначе $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.
3. Если $N_P > 1$, то $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$ для всех узлов $v \in V_P \setminus V_P^+$ принадлежащих хотя бы одному Р-компоненту, где есть узлы $V_Q^+ \cup V_P^+$.
Для всех остальных узлов $v \in V_P \setminus V_P^+$ $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.
4. Если $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \neq \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \neq \emptyset$, то справедливо неравенство $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) < \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$.

Доказательство Теоремы 2.

Очевидно, что достаточно доказать теорему для каждого отдельного Р-компонента. В тех компонентах, где нет узлов из V_P^+ или V_Q^+ , исходные данные КЗП не изменились, поэтому в силу Теоремы 1 не изменится и решение, что доказывает справедливость последних частей пунктов 1 и 3 теоремы.

Пусть G^* – Р-компонент, где есть узлы из V_P^+ или V_Q^+ . Применим к нему лемму 1.

Для G^* $V_P \neq \emptyset$ и $V_P \subseteq V^0 \cup V^+$, следовательно $V^- \neq V$. Тогда согласно пункту 5 леммы 1 сумма притоков по всем узлам V^- должна уменьшиться. Но это невозможно – V^- может включать только узлы с заданным притоком, а по каждому из них приток не уменьшился! Следовательно $V^- = \emptyset$. Таким образом, все узлы G^* содержатся в $V^0 \cup V^+$.

Предположим, что $V_Q \cap V^0 \neq \emptyset$. Рассмотрим подграф G^{**} из узлов V_Q , узлов V_P^+ и соединяющих их ветвей. Поскольку G^* – Р-компонент, подграф G^{**} связан. Тогда и $V_Q \cap V^{0+} \neq \emptyset$. Но согласно лемме 1 в узлах $V_Q \cap V^{0+}$ притоки должны были бы уменьшиться – что противоречит условиям теоремы. Следовательно $V_Q \cap V^0 = \emptyset$ и $V_Q \subset V^+$, что доказывает 1-й пункт теоремы.

Из сказанного выше следует, что $V^0 = V_P \setminus V_P^+$. Далее, $V^{00} = \emptyset$ – иначе узлы V^{00} не были бы связаны с остальными узлами G^* . Следова-

тельно, $V_P \setminus V_P^+ = V^{0+}$, и согласно лемме 1 притоки в этих узлах уменьшаются, что доказывает пункты 2 и 3 теоремы.

Пункт 4 теоремы является очевидным следствием пункта 3 и уравнения баланса притоков (4).

Непрерывность решения КЗП

Добавим теперь к требованию строгой монотонности функций φ_i требование непрерывности. Посмотрим, какие дополнительные свойства решения КЗП это влечет.

Обозначим Y вектор, составленный из исходных данных КЗП – первые N_P компонент – заданные узловые давления P_{fix} , остальные N_Q – заданные узловые притоки Q_{fix} ; $Y \in \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$. Обозначим через E множество тех Y , для которых КЗП имеет решение. Можно ли что-то сказать о нем?

Теорема 3 (о непрерывности и свойствах монотонности решения КЗП).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности и непрерывности. Тогда:

1. Множество E , на котором КЗП имеет решение, гомеоморфно Ω^{N_V} (или, что то же самое, \mathbb{R}^{N_V}) и, следовательно, не пусто, открыто и связно.
2. Все параметры решения (узловые давления, расходы, притоки) являются непрерывными функциями исходных данных.
3. Решение обладает следующими свойствами монотонности от исходных данных:
 - a. Давления во всех узлах из V_Q строго монотонно возрастают при возрастании заданных притоков и заданных давлений в узлах своего P -компонента, и не зависят от других исходных данных.
 - b. Притоки во всех узлах из V_P строго монотонно убывают при возрастании заданных притоков в узлах P -компонента, в которые они входят, и не зависят от заданных притоков в других узлах.
 - c. Приток в узле из V_P :
 - i. Строго возрастает при росте давления в том же узле, если в G есть другие узлы с заданным давлением.
 - ii. Строго убывает при росте давления в другом узле с заданным давлением из того же P -компонента.
 - iii. Не меняется во всех остальных случаях.

Доказательство теоремы 3.

Рассмотрим отображение $\Psi: \Omega^{N_V} \rightarrow \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}$, ставящее в соответ-

ствие вектору узловых давлений P вектор Y , составленный из давлений P_i в узлах из V_P и расходов Q_i в узлах из V_Q , рассчитанных из P по уравнениям (1)-(2). Фактически отображение Ψ ставит в соответствие вектору P исходные данные той КЗП, решением которой он является. Поэтому $E = \Psi(\Omega^{N_V})$.

Поскольку функции φ_i непрерывны, отображение Ψ также является непрерывным. Поскольку функции φ_i строго монотонны, в силу теоремы 1 оно является инъективным. Поэтому в силу теоремы Брауэра об инвариантности области отображение Ψ является гомеоморфизмом, а его образ – множество $E = \Psi(\Omega^{N_V})$ – открыто и гомеоморфно Ω^{N_V} . Это доказывает первый пункт теоремы.

Поскольку Ψ – гомеоморфизм, обратное отображение Ψ^{-1} непрерывно на E . Это означает, что узловые давления непрерывно зависят от исходных данных КЗП. Поскольку φ_i также непрерывны, рассчитываемые по уравнениям (1) и (2) расходы по ветвям и притоки в узлах также непрерывно зависят от исходных данных КЗП.

3-й пункт теоремы прямо вытекает из теоремы 2.

Теорема 4 (о существовании решения КЗП для промежуточных исходных данных).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, удовлетворяющими условиям строгой монотонности и непрерывности, на котором определена КЗП с $N_Q > 0$.

Тогда если $Y^1 = (P_{fix}^1, Q_{fix}^1) \in E$, $Y^2 = (P_{fix}^2, Q_{fix}^2) \in E$, $P_{fix}^1 \leq P_{fix}^2$, $Q_{fix}^1 \leq Q_{fix}^2$, и для (P_{fix}, Q_{fix}) имеют место неравенства $P_{fix}^1 \leq P_{fix} \leq P_{fix}^2$, $Q_{fix}^1 \leq Q_{fix} \leq Q_{fix}^2$ то и $(P_{fix}, Q_{fix}) \in E$. При этом для соответствующих им векторов узловых давлений $P_{var}^1 \leq P_{var} \leq P_{var}^2$.

Иными словами, если КЗП имеет решение для некоторых «граничных» давлений и притоков, то существует решение и для всех промежуточных значений (интуитивно достаточно ожидаемый результат).

Доказательство теоремы 4.

Пусть K – гипер-параллелепипед

$$P_{fix}^{(1)} \leq P_{fix} \leq P_{fix}^{(2)}, Q_{fix}^{(1)} \leq Q_{fix} \leq Q_{fix}^{(2)} \text{ в } \Omega^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_Q}.$$

Фактически требуется доказать, что $K \subseteq E$, то есть что $K \setminus E = \emptyset$. Допустим, что это не так. Поскольку K компактно, а E открыто, то и $K \setminus E$ компактно. Поэтому в $K \setminus E$ есть точка Y^* , ближайшая к Y^1 . Рассмотрим отрезок $I^* = [Y^1, Y^*]$, соединяющий точки Y^* и Y^1 . Поскольку Y^* – ближайшая к Y^1 точка $K \setminus E$, то все точки I^* , кроме Y^* , принадлежат E . Рассмотрим отображение Ψ^{-1} на интервале $[Y^1, Y^*]$. В силу теоремы 4 оно непрерывно

но, монотонно возрастает по всем координатам и ограничено по ним значениями координат $\Psi^{-1}(Y^2)$. Поэтому $\Psi^{-1}(Y)$ имеет предел P^* , когда Y стремится к Y^* по интервалу I^* . Так как Ψ непрерывна, $\Psi(P^*) = Y^*$, и, следовательно, $Y^* \in E$ - противоречие. Поэтому $K \setminus E = \emptyset$. Неравенство $P_{var}^1 \leq P_{var} \leq P_{var}^2$ следует из пункта 3а теоремы 4.

Теорема о существовании решения КЗП

Теорема 5 (о существовании решения КЗП).

Пусть G – связный граф с характеристиками всех ветвей из множества \tilde{Z}_a^2 , для которого задана КЗП. Тогда КЗП всегда имеет решение.

Доказательство теоремы 5.

Доказательство проведем по индукции по числу ветвей N_E графа G . Фактически это доказательство описывает некоторый рекурсивный алгоритм поиска решения. Конечно, вряд ли он численно эффективен, но тем не менее успешно позволяет установить существование решения.

База индукции ($N_E = 1$). Для графов, состоящих из одной ветви (и 2 узлов), для вырожденного случая, когда задано давление в 2 узлах, КЗП имеет решение по определению. Для случая задания давления в одном узле и притока в другом, решение КЗП существует в силу того, что функции f_L и f_F для ветвей с характеристиками из \tilde{Z}_a^2 определены на всей области $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (см. разд. 2 статьи).

Шаг индукции. Пусть граф G имеет $N_E > 1$ ветвей и существование решения КЗП доказано для всех графов с числом ветвей меньше N_E . Рассмотрим граф $G' = Pcut(G)$. Решение задачи КЗП на графе G эквивалентно ее решению на G' . Если последний несвязен и содержит несколько связных подграфов (P-приведенных компонент), то каждый из них содержит меньше N_E ветвей, и следовательно КЗП на каждом из них имеет решение, а следовательно и КЗП на G' .

Остается случай, когда G' связан, и, следовательно, является P-приведенным. Выберем в G' некоторый узел v' с заданным давлением $P_{fix}(v')$. Этот узел является висящим и соединен ветвью e' с некоторым узлом v'' , являющимся узлом с заданным притоком $Q_{fix}(v'')$. Для упрощения дальнейших рассуждений поменяем, если требуется, направление ветви e' , так чтобы она шла из узла v' в узел v'' . Пусть G'' – граф, полученный из G' удалением узла v' и ветви e'

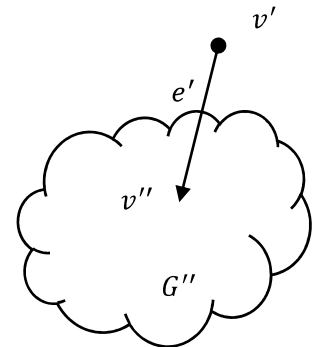


Рис. 3.

Он является связным и содержит $N_E - 1$ ветвь, то есть согласно предположению индукции на нем любая КЗП должна иметь решение. Возможны 2 варианта – 1) когда в графе G' есть

только один узел с заданным давлением (а именно – узел v'); 2) когда в графе G' есть более одного узла с заданным давлением – и, следовательно, такие узлы есть в G'' .

1-й вариант. В этом случае выполняем «прямой просчет» ветви e' . Из уравнения (4) в этом случае вытекает, что для искомого решения $Q(v') = -\sum_{v \in G', v \neq v'} Q_{fix}(v)$. Поскольку узел v' висящий, примем расход на ветви e' равным $X(e') = Q(v')$ и рассчитаем давление в узле v'' по функции f_L для ветви e' : $P(v'') = f_{e'_L}(P_{fix}(v'), X(e'))$. Зададим на графе G'' КЗП с теми же условиями, что на G' , но вместо притока в узле v'' зададим рассчитанное давление. Решение такой задачи на G'' существует, и вместе с заданным давлением в узле v' дает решением исходной КЗП на G' . Это очевидно для всех узлов, кроме v'' . В узле v'' для найденного решения

$$Q(v'') = -\sum_{v \in G'', v \neq v''} Q_{fix}(v) - X(e') = -\sum_{v \in G'', v \neq v''} Q_{fix}(v) + \sum_{v \in G', v \neq v'} Q_{fix}(v) = Q_{fix}(v''),$$

что и требовалось.

2-й вариант. В этом случае будем искать такое давление P'' в узле v'' , чтобы решение КЗП на G'' (которое всегда существует по предположению индукции) с заданным давлением P'' и с теми же условия в остальных узлах G'' , что и на G' , в комбинации с расходом по ветви e' , соответствующим конечным давлениям $P_{fix}(v')$ и P'' , обеспечивало решение исходной КЗП на G' . Чтобы подобное решение было решением исходной КЗП на G' , требует только обеспечить заданный приток в узле v'' . Соответствующее условие записывается в виде

$$Q_{G'' var}(v'', P'') - \varphi_{e'}(P_{fix}(v'), P'') = Q_{fix}(v''),$$

где $\varphi_{e'}$ – функция φ – для ветви e' , $Q_{G'' var}(v'', P'')$ – приток в узле v'' для решения КЗП на G'' с заданным давлением P'' в узле v'' и теми же, что на G' , условиями в остальных узлах G'' .

Определим функцию $q(P'')$ следующим образом:

$$q(P'') = Q_{G'' var}(v'', P'') - \varphi_{e'}(P_{fix}(v'), P'') - Q_{fix}(v'').$$

В соответствии с условиями на характеристики ветвей $-\varphi_{e'}(P_{fix}(v'), P'')$ как функция от P'' принадлежит множеству \tilde{Z}_a . Согласно предположению индукции $Q_{G'' var}(v'', P'')$ как функция от P'' определена на всем \mathbb{R} . Согласно пункту 2 теоремы 3 она непрерывна по P'' , а согласно пункту 3с1 теоремы 3 строго возрастает. Следовательно, функция $q(P'')$ также принадлежит множеству \tilde{Z}_a , а значит принимает в некоторой точке нулевое значение. Эта точка и будет искомой величиной давления P'' .

Теорема 5 имеет общий характер. Однако для практических целей, как уже было сказано, желательно установить условия существования решения для гидравлических цепей с ограниченной областью определения замыкающих соотношений по давлению, и без «асимптотических» условий 5), 6). Это в определенных границах возможно.

Приведем сначала наиболее простой (но очень распространенный и важный) частный случай.

Будем называть гидравлическую цепь пассивной, если все ее ветви пассивные. Частный случай КЗП, в которой заданные притоки $Q_{fix} = 0$, будем называть задачей расчета пропускной способности (ЗРПС).

Теорема 6 (о существовании решения задачи ЗРПС для пассивных цепей)

Пусть G – связный граф пассивной гидравлической цепи с характеристиками ветвей, определенными на $\Omega \times \Omega$ (где $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ – некоторое непустое открытое связное множество), удовлетворяющими условиям строгой монотонности и непрерывности. Пусть на G задана КЗП с $Q_{fix} = 0$ и $P_{fix} \in \Omega^{N_P}$. Тогда решение КЗП существует, причем для него

$$P_{var} \in [\min(P_{fix}), \max(P_{fix})]^{N_Q}.$$

Доказательство теоремы 6.

Теорема прямо вытекает из теоремы 4, если в качестве граничных исходных данных взять нулевые значения притоков и одинаковые узловые давления, равные $\min(P_{fix})$ и $\max(P_{fix})$.

Можно ли обобщить теорему 6 на общий случай цепей с ненулевыми притоками и активными ветвями? Хотелось бы иметь возможность оценивать возможность существования решения КЗП, например, на основе просчета простых путей в неориентированном графе \bar{G} , соответствующем G . Оказывается, это в определенной степени возможно.

Рассмотрим простые пути в графе \bar{G} . Будем называть их P -путями, если первый узел является узлом с заданным давлением (принадлежит V_P), а все остальные – с заданным притоком (принадлежат V_Q). Пусть Pa – P -путь. Поменяем ориентацию ветвей, если требуется, чтобы все они были ориентированы вдоль пути. Будем говорить, что путь Pa «пропускает» расход X , если КЗП на пути Pa с заданным давлением в начальном узле пути, притоком $-X$ в конечном узле и нулевыми притоками в промежуточных узлах (если они есть) имеет решение. Очевидно, чтобы определить, пропускает ли путь заданный расход, достаточно просто последовательно просчитать его ветви, определяя конечное давление в каждой – то есть определено ли значение $f_L(P_F, X)$ для каждой ветви, и лежат ли получен-

ные давления в области допустимых давлений Ω . Обозначим $f_{L_{Pa}}(Pa, P_F(Pa), X)$ давление в конечном узле пути в зависимости от давления в начальном узле пути и величины расхода. Очевидно, что если характеристики ветвей φ_i непрерывны и строго монотонны, то данная функция на своей области определения для каждого пути непрерывна, монотонно возрастает по давлению в начальном узле и монотонно убывает по величине расхода. Из характеристик монотонности очевидно также, что если путь пропускает расходы X_1 и X_2 , $X_1 \leq X_2$, то он пропускает и любой расход X между ними – $X_1 \leq X \leq X_2$. Более того, если задать на ветвях пути любые расходы между X_1 и X_2 (не обязательно одинаковые для всех ветвей пути), то прямой просчет пути с этими расходами даст узловые давления, лежащие между соответствующими узловыми давлениями для расходов X_2 и X_1 , и, следовательно, лежащие в Ω . Далее будем для краткости опускать 2-й параметр и записывать ее просто как $f_{L_{Pa}}(Pa, X)$.

Для каждого Р-компонента определим величины суммарного притока и оттока в его узлах с заданным притоком: $Q^+ = \sum_{v, Q_{fix}(v) > 0} Q_{fix}(v)$, $Q^- = \sum_{v, Q_{fix}(v) < 0} Q_{fix}(v)$. Суммирование ведется по всем узлам Р-компонента с заданными положительными (отрицательными) величинами притоков. Если таких узлов нет, Q^+ или соответственно Q^- принимаются равными нулю. Очевидно, что $Q^+ \geq 0 \geq Q^-$. Заместим, что расходы по некоторым ветвям могут быть и значительно больше этих величин (за счет течения между узлами с заданным расходам, а также циркуляции потоков).

Теперь мы готовы сформулировать следующую (интуитивно ожидаемую) теорему.

Теорема 7 (О существовании решения КЗП на ограниченной области давлений).

Пусть G – связный граф с характеристиками ветвей, определенными на $\Omega \times \Omega$, и удовлетворяющими условиям строгой монотонности и непрерывности, на котором задана КЗП. Если все Р-пути графа пропускают расходы Q^- и Q^+ , то решение КЗП существует. При этом давления в любом узле $u \in V_Q$ удовлетворяют неравенствам (минимум и максимум берутся по всем Р-путям, заканчивающимся в u)

$$P^-(u) = \min_{Pa} f_{L_{Pa}}(Pa, -Q^-) \leq P_{var}(u) \leq \max_{Pa} f_{L_{Pa}}(Pa, -Q^+) = P^+(u).$$

Для частного случая ЗРПС для сетей с активными ветвями $Q^- = Q^+ = 0$, т.е. согласно теореме 7 достаточно, чтобы все Р-пути пропускали нулевой расход, и при этом решение существует и будет удовлетворять условиям

$$P^-(u) = \min_{Pa} f_{L_{Pa}}(Pa, 0) \leq P_{var}(u) \leq \max_{Pa} f_{L_{Pa}}(Pa, 0) = P^+(u).$$

Доказательство теоремы 7 проводится по индукции по числу ветвей и строится практически идентично доказательству теоремы 5.

База индукции ($N_E = 1$). Для графов, состоящих из одной ветви (и 2 узлов), для вырожденного случая, когда задано давление в 2 узлах, КЗП имеет решение по определению. Для случая задания давления в одном узле и притока в другом – ветвь и есть Р-путь, и условие пропускания по ней расходов $-Q^+$ и $-Q^-$ обеспечивает существование решения.

Шаг индукции. Пусть граф G имеет $N_E > 1$ ветвей и теорема справедлива для всех графов с числом ветвей меньше N_E . Очевидно, что достаточно доказать ее справедливость только для Р-приведенных графов.

Итак, пусть G – Р-приведенный граф. Выберем некоторый узел с заданным давлением v' (см. рис. 3). Для упрощения дальнейших рассуждений поменяем, если требуется, направление ветви e' , так чтобы она шла из узла v' в узел v'' . Пусть G'' – граф, полученный из G удалением узла v' и ветви e' (см. рис. 3).

Возможны 2 случая – $N_P = 1$ и $N_P > 1$.

Рассмотрим сначала случай $N_P = 1$ (то есть узел v' – единственный узел с заданным давлением). В этом случае для решения КЗП, если оно существует, имеем $Q_{var}(v') = -(Q^+ + Q^-)$. Возьмем Р-путь Pa' , состоящий из одной ветви e' , и пропустим через него расход $X' = -(Q^+ + Q^-)$. Поскольку $-Q^+ \leq -(Q^+ + Q^-) \leq -Q^-$ и по условию теоремы Pa' пропускает расходы $-Q^+$ и $-Q^-$, он пропустит и расход X' , и при этом для него для $P'' = P_{var}(v'') = f_{L_{Pa}}(Pa', X')$ удовлетворяет условиям

$$P^-(v'') \leq f_{L_{Pa}}(Pa', -Q^-) \leq P'' \leq f_{L_{Pa}}(Pa', -Q^+) \leq P^+(v'').$$

Рассмотрим КЗП на G'' с заданным давлением в узле v'' $P_{fix}(v'') = P''$ и теми же условиями в остальных узлах G'' , что и для исходной КЗП на G . Для нее будут выполнены условия пропускания расходов по Р-путям. В самом деле, для Р-компонент G'' величина Q^+ не увеличится, а Q^- не уменьшится, поэтому Р-пути в G'' , начинающиеся в узлах, отличных от v'' , заведомо будут пропускать соответствующие расходы. А Р-пути, начинающиеся в v'' , будут их пропускать как части Р-путей в G (достаточно к ним в качестве первой ветви добавить ветвь e' с расходом X'). Следовательно, по предположению индукции решение КЗП на G'' существует, и узловые давления для него заведомо лежат между P^- и P^+ . Вместе с расходом X' на e' оно и будет решением исходной КЗП на G .

Рассмотрим теперь случай $N_P > 1$. Вновь возьмем Р-путь Pa' , состоящий из одной ветви e' , и пропустим через него расход, равный 0. Поскольку $-Q^+ \leq 0 \leq -Q^-$, и по условию теоремы Pa' пропускает расходы $-Q^+$ и $-Q^-$, он пропустит и нулевой расход, и при этом для него для $P^0 = P_{var}(v'') = f_{L_{Pa}}(Pa', 0)$ удовлетворяет условиям

$$P^-(v'') \leq f_{L_{Pa}}(Pa', -Q^-) \leq P^0 \leq f_{L_{Pa}}(Pa', -Q^+) \leq P^+(v'').$$

Рассмотрим КЗП на G'' с заданным давлением в узле v'' $P_{fix}(v'') = P^0$ и теми же условиями в остальных узлах G'' , что и для исходной КЗП на G . Для нее будут выполнены условия пропускания расходов по P -путям (по тем же причинам, что и для случая $N_p = 1$). Следовательно, по предположению индукции решение такой КЗП на G'' существует. При этом величины узловых давлений P_{var} будут лежать между P^- и P^+ .

Рассмотрим теперь другую КПЗ на G'' , условия на узлы которой во всех узлах полностью совпадают с исходным КПЗ на G (то есть в узле v'' задан приток). Очевидно, что для нее также выполнены условия пропускания расходов по P -путям – величины $-Q^+$ и $-Q^-$ те же, но часть путей (имеющих начало в узле v') не надо рассматривать. Следовательно, по предположению индукции решение такой КЗП на G'' существует (и величины P_{var} вновь лежат между P^- и P^+). Пусть $P^* = P_{var}(v'')$. Очевидно, это же решение является также решением КПЗ на G'' , в котором для узла v'' задано не приток, а давление P^* .

Таким образом, доказано, что существует решение задачи КПЗ на G'' (а заодно и на G) с заданным узловым давлением в узле v'' для двух значений этого давления: P^0 и P^* (при этом исходные данные во всех других узлах совпадают, а узловые давления P_{var} лежат между P^- и P^+). Тогда согласно теореме 4 такое решение существует для любых промежуточных значений давления в узле v'' , и для них P_{var} лежат между P^- и P^+ . Остается найти такое значение давления $P'' \in [P^0, P^*]$ для узла v'' , при котором приток в узле v'' $Q_{var}(v'')$ равен заданному значению $Q_{fix}(v'')$. При этом $Q_{var}(v'') = Q''_{var}(v'') - X'$, где $Q''_{var}(v'')$ – приток в графе G'' (без учета ветви e'), а X' – расход по ветви e' .

Если $P^0 = P^*$, то $P'' = P^0 = P^*$, поскольку при этом давлении $Q''_{var}(v'') = Q_{fix}(v'')$ и $X' = 0$.

Рассмотрим случай $P^0 \neq P^*$. В силу теоремы 3 $Q''_{var}(v'')$, X' и $Q_{var}(v'')$ на $[P^0, P^*]$ зависят от давления в узле v'' непрерывно, при этом $Q''_{var}(v'')$ и $Q_{var}(v'')$ строго возрастают, а X' строго убывает. Пусть $P^0 > P^*$. Тогда для давления P^0 $Q''_{var}(v'') > Q_{fix}(v'')$, $X' = 0$, а для P^* $Q''_{var}(v'') = Q_{fix}(v'')$, $X' > 0$. Тем самым для P^0 $Q_{var}(v'') > Q_{fix}(v'')$, а для P^* $Q_{var}(v'') < Q_{fix}(v'')$. Если же $P^0 < P^*$, то аналогичным образом для P^0 $Q_{var}(v'') < Q_{fix}(v'')$, а для P^* $Q_{var}(v'') > Q_{fix}(v'')$. Таким образом, функция $Q_{var}(v'') - Q_{fix}(v'')$ непрерывна, строго возрастает и меняет знак на $[P^0, P^*]$ и, следовательно, в некоторой единственной (искомой!) точке P'' принимает нулевое значение.

Разумеется, условия существования решения в теореме 7 являются достаточными, но вовсе не необходимыми. Они не учитывают особенности структуры и топологии цепи и лишь позволяют делать простую и быструю оценку. Их можно улучшить (например, отдельно выделяя поддережья из узлов V_Q , но это тема для отдельной статьи.

Абстрактные гидравлические цепи, мультипортовые элементы и свойства монотонности

Часть полученных в предыдущих параграфах результатов на самом деле легко переносится на еще более общий случай – если посмотреть на них с несколько иной точки зрения (W. C. Rheinboldt [17]). Приведем кратко соответствующие определения и результаты.

Представим себе, что мы имеем дело с некоторой гидравлической (или электрической, или любой другой) цепью, внутренняя структура которой нам, вообще говоря, неизвестна. Все, что мы знаем – это что у этой цепи есть N узлов (портов), и если подать на них некоторый вектор потенциалов P (давление, напряжение, и т.п.), то в них возникнут притоки Q . Таким образом, все, что нам известно, это функция $\Phi: \Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, ставящая в соответствие вектору узловых давлений вектор узловых притоков в систему: $Q = \Phi(P)$. Это и есть абстрактная гидравлическая цепь (АЦП). Для нее естественным образом определяется КЗП: задается вектор давлений P_{fix} в $N_P > 0$ узлах (образующих множество V_P) и вектор притоков Q_{fix} в остальных $N_Q = N_V - N_P$ узлах (образующих множество V_Q), при этом требуется найти давления P_{var} в остальных N_Q узлах и притоки Q_{var} в N_P узлах с заданным давлением. Обычные ГЦ являются частным случаем АЦП.

Оказывается, что для АЦП, функция Φ для которых обладает некоторыми «естественными» свойствами (соответствующими свойствам 1-6 параграфа 1 для функций φ), решение КЗП по-прежнему обладает свойствами монотонности, разрешимости и единственности решения.

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – некоторое отображение. Напомним некоторые определения. На множестве векторов из \mathbb{R}^n определено отношение частичного порядка: $x \leq y$, если для $\forall i$ $x_i \leq y_i$. F называется *изотонным*, если оно сохраняет порядок: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$. Если оно, наоборот, обращает порядок, то оно называется *анти-изотонным* (*антитонным*). F называется *диагонально изотонным*, если для $\forall i$ $F_i(x)$ не убывает по x_i (при фиксированных остальных переменных). F называется *внедиагонально антитонным* (ВДА), если для $\forall i \neq j$ $F_i(x)$ не возрастает по x_j . F называется *сбалансированным*, если $\sum_{i=1}^n F_i = 0$. Заметим, что если F ВДА и сбалансирована, то она автоматически диагонально изотонна.

Естественными требованиями для функции Φ , определяющей АГЦ, являются непрерывность, сбалансированность и ВДА.

Поведение АГЦ удобно описывать с помощью ассоциированных ориентированных графов. Определим ассоциированный граф \hat{G} следующим образом – будем включать ребро из узла v_i в узел v_j ($i \neq j$), если P_i как-то влияет на Q_j (при зафиксированных остальных узловых давлениях). Вообще говоря, эта зависимость может быть не всегда строго монотонной (например, при возникновении критического течения), поэтому определим подграф \hat{G}_{Strict} , который включает только те ребра, для которых эта зависимость всегда строго монотонно убывающая. Наконец, определим подграф \hat{G}_{Surf} , который включает только те ребра, для которых зависимость Q_j от P_i всегда не только строго убывающая, но и сюръективная (то есть Q_j при изменении P_i принимает все значения из \mathbb{R}). От связности и достижимости в графах \hat{G}_{Strict} и \hat{G}_{Surf} зависит существование и единственность решения КЗП. Лучше всего, когда \hat{G}_{Strict} (и тем более \hat{G}_{Surf}) сильно связаны.

Заметим, что если соединить (через общие узлы) несколько АГЦ, обладающих описанными выше естественными свойствами, то полученная АГЦ также будет ими обладать. Поэтому этими свойствами обладают и обычные ГЦ – они собраны из ветвей, которые такими свойствами обладают. Но можно собрать АГЦ и не только из элементов с двумя портами – в трубопроводах встречаются и такие мультипортовые элементы, как тройники, крестовины, 3-х и 4-х ходовая арматура, и т.д. Излагаемый подход охватывает и трубопроводы с подобными элементами – если поведение каждого из них в отдельности обладает описанными естественными свойствами.

Пусть \tilde{G} – ориентированный граф, и v_1, v_2 – 2 узла в нем. Достижимость v_2 из v_1 будем обозначать $v_1 \xrightarrow{\tilde{G}} v_2$. Множество всех узлов, достижимых (в \tilde{G}) из узла v , будем обозначать $\mathcal{R}_{\tilde{G}}(v)$, а множество узлов, из которых достигим узел v – $\mathcal{R}_{\tilde{G}}^{-1}(v)$. Для некоторого подмножества S узлов графа \tilde{G} обозначим $\mathcal{R}_{\tilde{G}}(S)$ множество узлов, достижимых из узлов S , и $\mathcal{R}_{\tilde{G}}^{-1}(S)$ – множество узлов, из которых достижимы какие-либо узлы S . Для \hat{G}_{Strict} и \hat{G}_{Surf} будем для простоты просто писать соответствующие индексы.

Теперь мы готовы сформулировать результаты, обобщающие результаты параграфов 1-5.

Лемма 1А об изменении давлений в АГЦ.

Пусть есть сбалансированная ВДА АГЦ и 2 вектора давлений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$. Рассмотрим множества узлов V^+ , V^- , V^0 :

$v \in V^+$ когда $P^{(1)}(v) < P^{(2)}(v)$;

$v \in V^-$ когда $P^{(1)}(v) > P^{(2)}(v)$;

$v \in V^0$ когда $P^{(1)}(v) = P^{(2)}(v)$.

Тогда

1) Если $V^+ \neq V$, $V^+ \neq \emptyset$, и $V \setminus V^+ \cap \mathcal{R}_{Strict}(V^+) \neq \emptyset$,

то $\sum_{v \in V^+} Q^{(1)}(v) < \sum_{v \in V^+} Q^{(2)}(v)$.

2) Если $V^- \neq V$, $V^- \neq \emptyset$, и $V \setminus V^- \cap \mathcal{R}_{Strict}(V^-) \neq \emptyset$,

то $\sum_{v \in V^-} Q^{(1)}(v) > \sum_{v \in V^-} Q^{(2)}(v)$.

Теорема 1А (о единственности решения КЗП АГЦ)

Если АГЦ сбалансирована, ВДА и $V_Q \subset \mathcal{R}_{Strict}^{-1}(V_P)$, то решение КЗП единственно.

Теорема 2А (о монотонности решения КЗП АГЦ)

Пусть АГЦ сбалансирована, ВДА и $V_Q \subset \mathcal{R}_{Strict}^{-1}(V_P)$, и имеются 2 решения КЗП (с совпадающими V_P и V_Q), причем $P_{fix}^{(1)} \leq P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \leq Q_{fix}^{(2)}$. Обозначим V_P^+ и V_Q^+ множества узлов с заданными давлениями и притоками, для которых неравенство между исходными данными строгое. Тогда:

1) $P_{var}^{(1)} \leq P_{var}^{(2)}$, причем для узлов $\mathcal{R}_{Strict}(V_P^+ \cup V_Q^+) \cap V_Q$ $P_{var}^{(1)} < P_{var}^{(2)}$.

2) Если $N_P > 1$, то $Q_{var}^{(1)}(v) \geq Q_{var}^{(2)}(v)$ в узлах $V_P \setminus V_P^+$, причем в узлах $(V_P \setminus V_P^+) \cap \mathcal{R}_{Strict}(V_P^+ \cup V_Q^+)$ $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$.

3) Если $N_P = 1$ и $V_Q^+ \neq \emptyset$, то в единственном узле v с заданным давлением $Q_{var}^{(1)}(v) > Q_{var}^{(2)}(v)$, иначе $Q_{var}^{(1)}(v) = Q_{var}^{(2)}(v)$.

4) $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) \leq \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$. При этом если $N_P > 1$, $V_Q^+ = \emptyset$, $V_P^+ \neq \emptyset$, $V_P \setminus V_P^+ \neq \emptyset$, $(V_P \setminus V_P^+) \cap \mathcal{R}_{Strict}(V_P^+) \neq \emptyset$, то $\sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(1)}(v) < \sum_{v \in V_P^+} Q_{var}^{(2)}(v)$.

Теорема 3А (о непрерывности и свойствах монотонности решения КЗП АГЦ)

Пусть АГЦ непрерывна, сбалансирована, ВДА и $V_Q \subset \mathcal{R}_{Strict}^{-1}(V_P)$. Тогда

1. Множество E , на котором КЗП имеет решение, гомеоморфно Ω^{N_V} (или, что то же самое, \mathbb{R}^{N_V}) и, следовательно, не пусто, открыто и связно.

2. Все параметры решения (узловые давления и притоки) являются непрерывными функциями исходных данных.

3. Решение обладает свойствами монотонности от исходных данных, соответствующими описанным в теореме 2А.

Теорема 4А (о существовании решения КЗП АГЦ для промежуточных исходных данных).

Пусть АГЦ непрерывна, сбалансирована, ВДА, $V_Q \subset \mathcal{R}_{Strict}^{-1}(V_P)$, и имеются 2 решения КЗП (с совпадающими V_P и V_Q), причем $P_{fix}^{(1)} \leq P_{fix}^{(2)}$ и $Q_{fix}^{(1)} \leq Q_{fix}^{(2)}$. Тогда для любого «промежуточного» набора исходных данных $P_{fix}^{(1)} \leq P_{fix} \leq P_{fix}^{(2)}$, $Q_{fix}^{(1)} \leq Q_{fix} \leq Q_{fix}^{(2)}$ КЗП также имеет решение, причем $P_{var}^{(1)} \leq P_{var} \leq P_{var}^{(2)}$.

Теорема 5А (о существовании решения КЗП АГЦ)

Пусть АГЦ непрерывна, сбалансирована, ВДА и $V_Q \subset \mathcal{R}_{Surf}^{-1}(V_P)$. Тогда любая КЗП для данного АГЦ имеет решение.

Будем говорить, что АГЦ пассивна, если при приложении ко всем узлам равных давлений все притоки равны нулю

Теорема 6А (о существовании решения ЗРПС для АГЦ).

Пусть АГЦ непрерывна, сбалансирована, пассивна, ВДА и $V_Q \subset \mathcal{R}_{Strict}^{-1}(V_P)$. Пусть задана КЗП с $Q_{fix} = 0$ и $P_{fix} \in \Omega^{N_P}$. Тогда решение КЗП существует, причем для него $P_{var} \in [\min(P_{fix}), \max(P_{fix})]^{N_Q}$.

Доказательства всех теорем, кроме 5А, идейно вполне аналогичны теоремам для обычных ГЦ, поэтому здесь не приводятся. Приведем только действительно нетривиальное доказательство теоремы 5А, которое отличается от доказательства теоремы 5, и при этом проще приведенного в [17].

Проведем доказательство по индукции, по числу N_V (снова та же рекурсия).

Для вырожденного случая $N_V = 0$ теорема справедлива по определению.

Пусть $N_V > 0$. Поскольку $V_Q \subset \mathcal{R}_{Surf}^{-1}(V_P)$, всегда можно выбрать такой узел $v' \in V_Q$, из которого некоторое ребро e' в \hat{G}_{Surf} ведет в узел $v'' \in V_P$. Поменяем условия КЗП в узле v' – будем задавать в нем давление P' – а в остальных узлах оставим прежними. Получившаяся КЗП удовлетворяет условиям теоремы и имеет на 1 меньше число узлов с заданными притоками, и в силу предположения индукции, имеет решение. Будем варьировать величину P' , и посмотрим, как зависит $Q_{var}(v')$ для решения такой КЗП от P' . Из теорем 3А и 4А вытекает, что эта зависимость непрерывная и монотонно возрастающая. Из условия сбалансированности получаем $Q_{var}(v') = -\sum_{v \in V_Q, v \neq v'} Q_{fix}(v) - \sum_{v \in V_P} Q_{var}(v)$. При этом первая сумма в

правой части постоянна. Во второй сумме согласно теоремам 3А и 4А все слагаемые непрерывны и не возрастают. При этом среди них есть слагаемое, соответствующее узлу v'' . Поскольку в этот узел ведет ребро из v' в графе \hat{G}_{surf} , то если бы $P_{var}(v)$ для узлов $v \in V_Q, v \neq v'$ не менялись, то $Q_{var}(v'')$ была бы непрерывно строго убывающей функцией P' и принимала все значения из \mathbb{R} . Однако на самом деле величины $P_{var}(v)$ для узлов $v \in V_Q, v \neq v'$ непрерывно возрастают с ростом P' (теоремы 3А и 4А) и в силу свойства ВДА нашей АГЦ могут только усилить изменение $Q_{var}(v'')$ с ростом P' . Поэтому $Q_{var}(v'')$ принимает все значения из \mathbb{R} , и, следовательно, то же делает и $Q_{var}(v')$. Поэтому существует такое значение P' , при котором $Q_{var}(v')$ равно заданному значению $Q_{fix}(v')$ исходной КЗП. Тем самым решение исходной КЗП найдено.

Матрицы чувствительности и свойства матрицы Максвелла

Вернемся теперь к «обычным» гидравлическим цепям (заметим, впрочем, что излагаемые далее результаты легко адаптируются и для АГЦ).

Рассмотрим ситуацию, когда замыкающие соотношения ветвей непрерывно дифференцируемы в окрестности решения КЗП, выведем важнейшие матрицы чувствительности решения к исходным данным (аналогичные полученным в [22 – 24]), и посмотрим, как их свойства соответствуют установленным законам монотонности решения КЗП.

Обозначим $d_{Fi} = \partial \varphi_i(P_F, P_L) / \partial P_F$, $d_{Li} = -\partial \varphi_i(P_F, P_L) / \partial P_L$. Тогда в силу монотонности φ_i справедливы неравенства $d_{Fi} \geq 0$ и $d_{Li} \geq 0$. Далее мы будем рассматривать только «невыврожденный» случай, когда производные отличны от нуля, т.е. $d_{Fi} > 0$ и $d_{Li} > 0$.

Определим диагональные матрицы D_F и D_L с d_{Fi} и d_{Li} на диагонали. Тогда из уравнений (3) и (2) получаем

$$dX = (D_F A_F^T + D_L A_L^T) dP; \quad (5)$$

$$dQ = A(D_F A_F^T + D_L A_L^T) dP. \quad (6)$$

Очевидно, что для вырожденного случая $N_Q = 0$ решение непрерывно дифференцируемо. Рассмотрим случай $N_Q > 0$. Получим Якобиан отображения $\Psi_{P_{fix}}$. Для этого перенумеруем узлы графа так, чтобы сначала шли узлы с из V_Q (с заданным расходом), а затем из V_P (с заданным давлением) и разобьем вектора и матрицы на соответствующие блоки:

$$P = \begin{pmatrix} P_{var} \\ P_{fix} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_{fix} \\ Q_{var} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_Q \\ A_P \end{pmatrix}, A_F = \begin{pmatrix} A_{FQ} \\ A_{FP} \end{pmatrix}, A_L = \begin{pmatrix} A_{LQ} \\ A_{LP} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда уравнения (5) и (6) запишутся в виде

$$dX = (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix}; \quad (8)$$

$$dQ_{fix} = A_Q (D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + A_Q (D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix}; \quad (9)$$

$$dQ_{var} = A_P(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) dP_{var} + A_P(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T) dP_{fix}. \quad (10)$$

Матрица $\tilde{M} = A_Q(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T)$, связывающая dQ_{fix} и dP_{var} (называемая также модифицированной матрицей Максвелла [12, 14]), и есть матрица Якоби отображения $\Psi_{P_{fix}}$. Эта матрица обладает целым рядом замечательных свойств, которые мы далее обсудим. Пока лишь отметим, что для связного графа и $d_{Fi} > 0$, $d_{Li} > 0$ матрица \tilde{M} всегда не вырождена. Из этого, в соответствии с теоремой о неявной функции, следует, что все параметры решения КЗП являются локально непрерывно дифференцируемыми функциями исходных данных. Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{PP} &= A_P(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T), \quad \tilde{M}_{PQ} = A_P(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T), \\ \tilde{M}_{QP} &= A_Q(D_F A_{FP}^T + D_L A_{LP}^T). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда, выражая из (9), (10) изменение параметров решения через изменение исходных данных, получим

$$dP_{var} = \tilde{M}^{-1} dQ_{fix} - \tilde{M}^{-1} \tilde{M}_{QP} dP_{fix}; \quad (12)$$

$$dQ_{var} = \tilde{M}_{PQ} \tilde{M}^{-1} dQ_{fix} + (\tilde{M}_{PP} - \tilde{M}_{PQ} \tilde{M}^{-1} \tilde{M}_{QP}) dP_{fix}. \quad (13)$$

Уравнения (12), (13) дают основные матрицы чувствительности нашей задачи. Для «традиционных» цепей они совпадают с полученными в [22, 23, 24].

Изучим теперь свойства полученных матриц, прежде всего – модифицированной матрицы Максвелла. Запишем последнюю в виде

$$\begin{aligned} \tilde{M} = A_Q(D_F A_{FQ}^T + D_L A_{LQ}^T) &= A_{FQ} D_F A_{FQ}^T + A_{LQ} D_L A_{LQ}^T + A_{LQ} D_F A_{FQ}^T + \\ &+ A_{FQ} D_L A_{LQ}^T \end{aligned}$$

Матрицы $A_{FQ} D_F A_{FQ}^T$ и $A_{LQ} D_L A_{LQ}^T$ – диагональные. Первая содержит в i -й ячейке диагонали (соответствующей i -му узлу V_Q) сумму d_F всех выходящих из узла ветвей вторая – сумму d_L всех входящих в узел ветвей. Матрица $A_{FQ} D_L A_{LQ}^T$ в i -й строке и j -м столбце содержит сумму $-d_L$ всех ветвей, выходящих из узла i и входящих в узел j , а матрица $A_{LQ} D_F A_{FQ}^T$ – сумму $-d_F$ всех ветвей, входящих в узел i и выходящих из j . В итоге матрица \tilde{M} содержит на диагонали сумму d_F всех выходящих из узла и сумму d_L всех входящих в узел ветвей (кроме ветвей-петель); недиагональный элемент m_{ij} содержит сумму величин для всех соединяющих вершины i и j ветвей: $-d_L$ для ветвей из i -го узла в j -й и $-d_F$ для ветвей из j -го узла в i -й.

Матрица \tilde{M}_{PP} имеет такую же структуру, как \tilde{M} , но только для узлов V_P .

Для матриц \tilde{M}_{QP} и \tilde{M}_{PQ} имеем $\tilde{M}_{QP} = A_{FQ} D_F A_{FP}^T + A_{LQ} D_L A_{LP}^T + A_{FQ} D_L A_{LP}^T + A_{LQ} D_F A_{FP}^T$ и $\tilde{M}_{PQ} = A_{FP} D_F A_{FQ}^T + A_{LP} D_L A_{LQ}^T + A_{FP} D_L A_{LQ}^T + A_{LP} D_F A_{FQ}^T$. Первые 2 слагаемых в обоих выражениях равны нулю, и в итоге обе матрицы содержат в ячейке ij сумму величин, соединяющих узлы i и j :

$-d_L$ для ветвей из i -го узла в j -й и $-d_F$ для ветвей из j -го узла в i -й. При этом $\tilde{M}_{PQ} = \tilde{M}_{QP}^T$.

Матрица \tilde{M} для цепей с зависящими от давления замыкающими соотношения, не является симметричной (как для «традиционных» цепей). Тем не менее, она сохраняет многие свои замечательные свойства.

Прежде всего, \tilde{M} является матрицей со слабым диагональным преобладанием по столбцам. При этом строгое диагональное преобладание имеет место в столбцах, соответствующим узлам, соединенным ветвями с узлами из V_P (которые дают дополнительный вклад в диагональные элементы). Поскольку граф связан и $N_P > 1$, из любого узла V_Q существует путь до какого-либо узла из V_P с заданным давлением, а следовательно и до узла из V_Q , соединенного с V_P , причем ветвям пути соответствуют ненулевые элементы вне диагонали. Это делает матрицу \tilde{M} принадлежащей классу WCDD (Weakly Chained Diagonally Dominant), а следовательно, невырожденной (в российской литературе на этот факт принято ссылаться как на обобщение теоремы Ольги Тауски [25]).

Однако это еще не все замечательные свойства матрицы \tilde{M} . Одновременно она является L-матрицей, то есть матрицей, чьи диагональные элементы положительны, а не диагональные элементы отрицательны или равны нулю. Оказывается, уже давно известно ([26]), что все матрицы, одновременно относящиеся к классам WCDD и L, являются невырожденными M-матрицами (матрицами с неположительными не диагональными элементами, действительная часть собственных значений которых положительна). Этот класс матриц привлекает в последние годы большое внимание и возникает в разнообразных областях математики (дифференциальных уравнениях, марковских цепях и др. [27]). В частности, для них установлено много полезных оценок для их определителя и различных норм (см., например, [28, 29]). M-матрицы монотонны – в частности, обратные к ним матрицы содержат только неотрицательные элементы.

Изучим более детально свойства и структуру обратной модифицированной матрицы Максвелла \tilde{M}^{-1} .

Невырожденная M-матрица \tilde{M} с учетом теоремы Перрона-Фробениуса может быть представлена в виде [27] $\tilde{M} = sI - B$, где I – единичная матрица, матрица B неотрицательна ($B \geq 0$), а s больше спектрального радиуса матрицы B ($s > \rho(B)$). Тогда обратная матрица может быть представлена в виде

$$\tilde{M}^{-1} = s^{-1} \left[I + \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} B^i \right]. \quad (14)$$

При этом ряд в (14) сходится в силу неравенства $\rho(s^{-1}B) < 1$.

Очевидно, что все элементы матрицы \tilde{M}^{-1} неотрицательны, причем все диагональные элементы положительны. Какие именно не диагональные элементы положительны? Очевидно, в матрице B положительны те, и только те не диагональные элементы, которые отрицательны в матрице \tilde{M} – то есть соответствующие узлам, соединенным ветвью. В матрице B^i положительны все не диагональные элементы, соответствующие узлам, соединенным путем из i ветвей со всеми узлами в V_Q (а, также, возможно, и часть элементов, соединенных путем из меньшего количества ветвей – это зависит от диагональных элементов матрицы B). В итоге из формулы (14) получаем, что в матрице \tilde{M}^{-1} положительны те, и только те элементы, которые соответствуют паре узлов, соединенных некоторым путем со всеми узлами в V_Q .

Перенумеруем узлы V_Q таким образом, чтобы узлы из каждого P -компонента шли подряд. Тогда матрицы \tilde{M} и \tilde{M}^{-1} примут вид блочно-диагональных – каждый блок соответствует невырожденному (содержащему узлы из V_Q) P -компоненту. Поскольку узлы V_Q в каждом P -компоненте образуют связный подграф, тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 8 (об обратной матрице Максвелла)

Обратная модифицированная матрица Максвелла \tilde{M}^{-1} имеет блочно-диагональную структуру, соответствующую невырожденным P -компонентам графа, причем все элементы каждого блока положительны. Если граф содержит только 1 P -компонент, то все элементы матрицы \tilde{M}^{-1} положительны.

Теперь мы может установить соответствие между свойствами матриц чувствительности и свойствами монотонности решения КЗП. Установленный теоремой 8 результат, очевидно, соответствует п.3а теоремы 3 в части чувствительности dP_{var} от dQ_{fix} . Матрица $-\tilde{M}^{-1}\tilde{M}_{QP}$, определяющая чувствительность dP_{var} от dP_{fix} , имеет только положительные элементы для пар узлов, принадлежащих одному P -компоненту, и нулевые остальные. Это также соответствует п.3а теоремы 3. Матрица $\tilde{M}_{PQ}\tilde{M}^{-1}$, определяющая чувствительность dQ_{var} к dQ_{fix} , имеет отрицательные элементы для принадлежащих одному P -компоненту узлов, и нулевые остальные. Это соответствует п.3б теоремы 3.

Наконец, рассмотрим матрицу $\tilde{M}_{PP} - \tilde{M}_{PQ}\tilde{M}^{-1}\tilde{M}_{QP}$, определяющую чувствительность dQ_{var} к dP_{fix} . Заметим, что в силу уравнения (4) сумма компонентов dQ_{var} при $dQ_{fix} = 0$ должна быть равна нулю. Это означает, что сумма строк матрицы $\tilde{M}_{PP} - \tilde{M}_{PQ}\tilde{M}^{-1}\tilde{M}_{QP}$ равна нулю. Для случая, ко-

гда узел с заданным давлением только один, вся матрица чувствительности равна нулю. Для вырожденных P -компонент диагональные элементы положительные, а не диагональные отрицательные. Наконец, для невырожденных P -компонент все не диагональные элементы матрицы отрицательны – поэтому из-за равенства нулю строк все диагональные элементы положительны. Это соответствует п.3с теоремы 3.

Приложение 1. Формулировка теоремы о неявной функции для непрерывных функций

Пусть отображение F из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в \mathbb{R}^m определено в некоторой окрестности W точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и удовлетворяет следующим условиям:

- F является непрерывным в W ;
- $F(x_0, y_0) = 0$;
- существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0 в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно, такие что $U \times V \subseteq W$, и для любого $x \in U$ отображение $y \rightarrow F(x, y)$ является локально взаимно-однозначным.

Тогда существует такое непрерывное отображение $f: U \rightarrow V$, что $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ для всех $x \in U$ и $y \in V$.

Литература

1. **Пшеничный Б.Н.** Расчет электрических сетей на ЭВМ // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1962. – № 5.– С. 942–947.
2. M. Collins, L. Cooper, R. Helgarson, J. Kennington, L. Leblanc. Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques // Management Science, 1978. № 24, pp. 747–760.
3. **A. Bermudes, J. Gonzalez-Diaz, F.J. Gonzalez-Diequez.** Existence of solution to a model of gas transportation network on non-flat topology // Non-linear analysis: Real World Applications. 2017, Vol. 37, pp. 71–93.
4. **Меренков А.П., Хасилев В.Я.** Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. – 278 с.
5. **Сухарев М.Г.** О выборе метода при расчете на ЭВМ течений по сетям // Кибернетика, 1969. – № 6. – С. 9–11.
6. **Сухарев М.Г.** Уточненная формализация задач анализа гидравлических цепей // Трубопроводные системы энергетики: Управление развитием и функционированием. – Новосибирск: Наука, 2004. – С. 15–24.
7. **Елифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Приложение теории двойственности к задачам потокораспределения // Вычислительные технологии, 2009. – Т. 14, № 1. – С. 67–79.

8. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Задача потокораспределения в неклассической постановке // Сибирский журнал индустриальной математики, 2010. – Т. 13, № 4. – С.15–24.

9. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Применение теории двойственности при моделировании гидравлических систем с регуляторами расхода // Известия ВУЗов. Математика, 2010. – № 9. – С. 76–81.

10. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И.** Задача потокораспределения с нефиксированными расходами в узлах // Кибернетика и системный анализ, 2011. – № 1. – С. 81–92.

11. **Епифанов С.П., Зоркальцев В.И., Медвежонков Д.С.** Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения при ограничениях-неравенствах на переменные // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 144–158.

12. **Михайловский Е.А.** Численное решение задачи потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами при произвольных замыкающих соотношениях // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Математическое и компьютерное моделирование. – Новосибирск: Наука, 2014. – С. 34–45.

13. **Новицкий Н.Н., Михайловский Е.А.** Модифицированный метод контурных расходов для расчета потокораспределения в гидравлических цепях при зависимых от давления законах течения // В сб. Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем. Труды XIV Всероссийского научного семинара. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 57–66.

14. **Михайловский Е.А., Новицкий Н.Н.** Модифицированный метод узловых давлений для расчета потокораспределения в гидравлических цепях при нетрадиционных замыкающих соотношениях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, 2015. – № 2(218). – С. 30–42.

15. **Marc Vuffray, Sidhant Misra, Michael Chertkov.** Monotonicity of Dissipative Flow Network Renders Robust Maximum Profit Problem Tractable: General Analysis and Application to Natural Gas Flow. <https://arxiv.org/abs/1504.02370>.

16. **Garrett Birkhoff, Bruce Kellogg.** Solution of Equilibrium Equations in Thermal Networks // Proc. Of Symp. on Generalized Networks, Vol.16, published for Polyt. Inst. Brooklyn, N.Y., 1966, pp. 443–452.

17. **Werner C. Rheinboldt.** On M-Functions and Their Application to Non-linear Gauss-Seidel Iterations and to Network Flows // J. of Math. Analysis and applications. 1970, Vol.32, № 2, pp. 274–307.

18. **Porsching T.A.** Jacobi and Gauss-Zeidel Methods for Nonlinear Network Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1969, Vol.6, № 3, pp. 437–449.
19. **Porshing T.A.** Network Problems, M-Functions and Uniformly Monotone Networks. Quarterly of Applied Mathematics, 1976, Vol.34, № 1, pp.47–57.
20. **Jittorntrum K.** An Implicit Function Theorem // Journal of optimization theory and applications. 1978, Vol.25, № 4, pp. 575–77.
21. **Kumagai S.** An Implicit Function Theorem: Comment // Journal of optimization theory and applications. 1980, Vol.31, № 2, pp. 285–288.
22. **Епифанов С.П., Новицкий Н.Н.** Модели чувствительности гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами и их применение для анализа управляемости трубопроводных систем // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2007. – С. 27–47.
23. **Боровин Д.И., Епифанов С.П., Новицкий Н.Н.** Развитие моделей и методов анализа чувствительности гидравлических цепей // Тр. XII Всероссий. науч. семинара. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010. – С. 93–102.
24. **Епифанов С.П., Новицкий Н.Н., Боровин Д.И.** Развитие моделей и методов анализа чувствительности гидравлических цепей // В кн. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 288 – 294.
25. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.
26. **Parsiad Azimzadeh.** A fast and stable test to check if a weakly diagonally dominant matrix is an M-matrix. <https://arxiv.org/pdf/1701.06951.pdf>
27. **Plemmons R.J.** M-Matrix Characterization. I – Nonsingular M-Matrices. Linear Algebra and Its Applications, 1977, Vol.18, pp. 175–188.
28. **Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сибирский математический журнал, 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1248–1254.
29. **Wen Li, Yanmei Chen.** Some new two-side bounds for determinants of diagonally dominant matrices // Journal of Inequalities and Applications, 2012. – № 1.