



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТУПЛЕНИЯ ВОДЫ В РЕЗЕРВУАРЫ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ ПОДАЧИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОДЫ

Баранчикова Н.И.<sup>1</sup>  
канд. физ.-мат. наук,  
доцент

Бычкова Н.И.<sup>2</sup>  
канд. техн. наук,  
доцент

Епифанов С.П.<sup>3</sup>  
канд. физ.-мат. наук,  
гл. специалист

Корельштейн Л.Б.<sup>4</sup>  
канд. физ.-мат. наук,  
зам. директора по науч. работе

1 – Иркутский национальный исследовательский технический университет, кафедра «Городское строительство и хозяйство», г. Иркутск;

2 – Иркутский национальный исследовательский технический университет, кафедра «Монументально-декоративной живописи и дизайна», г. Иркутск;

3 – ООО «Иркутский ремонтно-механический завод», г. Иркутск;

4 – ООО «НТП Трубопровод», г. Москва

Рассматривается математическая модель одного из значимых элементов любой средней и крупной системы централизованного водоснабжения населенного пункта – резервуар чистой воды. Работа резервуаров оказывает значительное влияние на параметры потокораспределения во всей системе. Поэтому важно иметь адекватную количественную модель функционирования резервуаров в любых режимах. Предлагается математическая модель поступления воды в резервуары для двух типов оголовков подающих трубопроводов при незначительных напорах, когда сечение на выходе из оголовка-поворота заполнено водой не полностью. Предлагаемая модель позволяет адекватно оценивать расходы поступающей воды в резервуары и уровни воды в них, а значит и подачу насосов, забирающих воду из резервуаров при различных режимах работы.

**Ключевые слова:** водоснабжение, резервуары чистой воды, водопроводная сеть, потокораспределение, водослив, нефиксированный узловый отбор, пьезометрический напор.

Резервуар чистой воды (РЧВ) – необходимый элемент любой достаточно большой системы водоснабжения. Объем резервуаров в системах водоснабжения может составлять от десятков до нескольких сотен процентов суточной подачи воды в населенный пункт или на промышленное предприятие. РЧВ – единственный элемент системы водоснабжения, который одновременно является источником и потребителем. Обычно резервуары выполняют функции резервирования и регулирования. Во многих системах водоснабжения РЧВ являются наиболее крупными потребителями (после насосных станций первого подъема и водопроводных очистных сооружений), на водопроводной сети – чаще в ночные часы. В системах водоснабжения крупных городов и в групповых водопроводах устраивают многие десятки РЧВ и, часто, на одной площадке не менее двух, хотя встречаются случаи и до восьми РЧВ на одной площадке.

До настоящего времени поступление воды в РЧВ иногда регулируют запорной арматурой, в зависимости от уровня воды в одном из них, хотя в наиболее прогрессивных водоканалах уже

применяются автоматические регулирующие клапаны с функциями регулирования уровня и поддержания давления («до себя») или ограничения расхода (чаще на групповых водопроводах). При заполнении резервуаров автоматические регуляторы поддерживают минимальное давление перед РЧВ, при котором у остальных потребителей обеспечено требуемое давление.

В случае, когда резервуаров больше двух, а это наиболее распространенный случай, и они расположены несимметрично относительно подающего и всасывающего трубопроводов, наиболее вероятно, что уровни воды в резервуарах будут разными, что необходимо учитывать при определении отметки оси насосов, забирающих воду из РЧВ.

В настоящее время в большинстве систем водоснабжения городов и населенных пунктов РФ имеются избыточные мощности, поэтому на противопожарные и аварийные нужды часто можно подать воду прямо из сети, но в случае недостатка пропускной способности необходимо учитывать все аспекты работы РЧВ, особенно в аварийных и нештатных ситуациях, как и при калибровке сети.

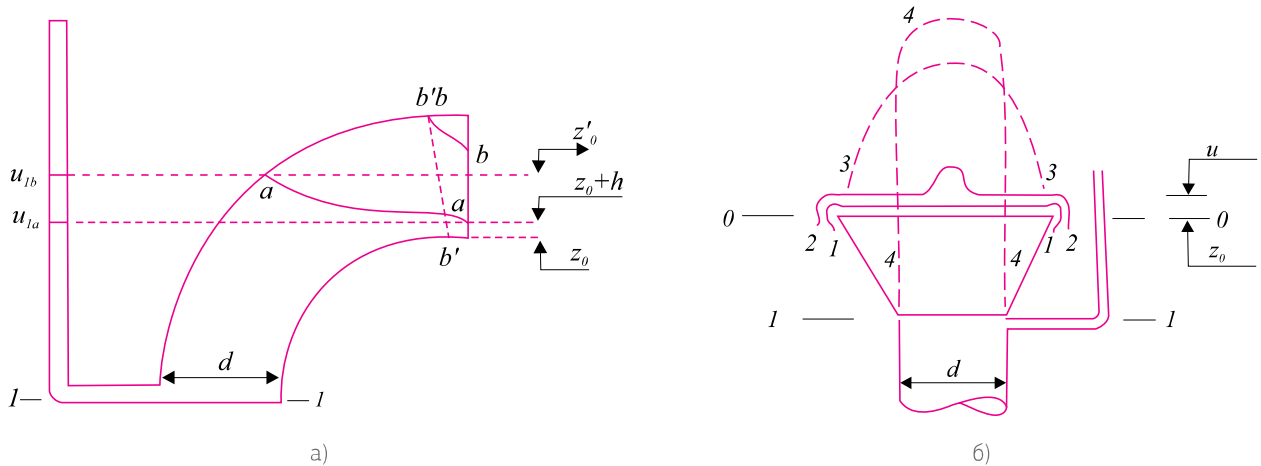


Рисунок 1  
Оголовки трубопроводов в РЧВ.

При моделировании гидравлических режимов важное значение имеет количественная адекватность как самой модели, так и ее отдельных элементов, причем требуется определять и границы адекватности в различных режимах [1, 2].

В связи с вышеизложенным, актуально максимально реалистично моделировать функционирование РЧВ, особенно если их несколько, так как в этом случае расход воды в каждый резервуар может быть разным, а, следовательно, и уровни воды в них, хотя в некоторых случаях отличие может быть несущественным (зависит от скорости обмена воды в РЧВ).

Рассмотрим наиболее распространенные типы оголовков, через которые вода поступает в РЧВ (рис. 1).

В случае, когда уровень воды в резервуаре превышает отметку излива  $z_0$  (рис. 1б) или  $z_0+d$  (рис. 1а), то расход воды в РЧВ зависит от текущего уровня воды в нем ( $u_{r_2}$ ) (рис. 2) и определяется с использованием модели истечения жидкости под уровень.

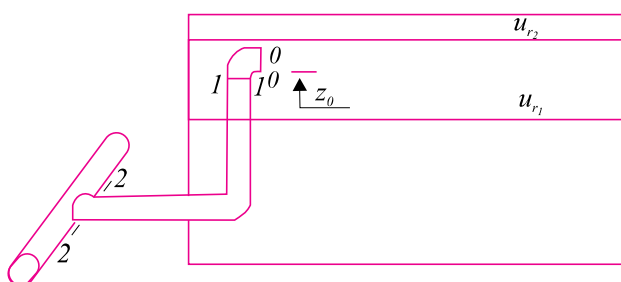


Рисунок 2  
Схема подающего трубопровода в РЧВ.

Такой случай рассмотрен в [3-5] и предназначен в основном для определения напора насоса. Если же уровень воды в РЧВ ниже отметки  $z_0$  (рис. 1, 2), то расход воды в резервуар не зависит от уровня воды в РЧВ и определяется другими параметрами, а не только отметкой излива [3].

Для рассматриваемых схем исполнения оголовков, через которые вода поступает в резервуар (рис. 1), при уровне воды ( $u_{r_1}$ ) ниже отметки излива, определить расход в резервуар можно используя модель истечения через водослив [6, 7].

Так, на рисунке 1а представлен круговой водослив [6], на рисунке 1б – кольцевой водослив с острой наклонной кромкой [8].

Если перепад на водосливе меньше напора на водосливе, то водослив является подтопленным, и требуется учитывать тот факт, что водослив является подтопленным [8].

Для кругового водослива (рис. 1а, 2) расход воды, поступающей в резервуар, можно вычислить по формуле:

$$b(u_1, u_2) = \begin{cases} f^{-1}(u_2 - z'_0) & , \\ m_1 \sigma_n (0,344a + 8,881a^2)(10d)^{5/2}, & \\ 0, & \end{cases} \quad (1)$$

$$u_2 > \bar{u}_2,$$

$$u_2 \leq \bar{u}_2, z_0 < u_1 \leq z'_0, u_{r_1} \leq z_0,$$

$$u_2 < z_0.$$

где  $f$  – зависимость потерь напора от расхода на участке между сечениями 2-2 и  $b'-b'$  (рис. 1а, 2);



$m_1$  – коэффициент расхода кругового водослива,

$m_1 \approx 0,6$ ;  $a=(u_1-z_0)/d$  – наполнение кругового водослива;

$u_1, u_2$  – напор в сечении 1-1, 2-2 соответственно,

и  $u_1 = z_0 + h$ ,  $h$  – напор на гребне водослива;

$d$  – диаметр кругового водослива, м;

$\sigma_n$  – коэффициент подтопления, можно принять  $\sigma_n \approx 1$ , когда водослив подтоплен;

$\bar{u}_2$  – напор в сечении 2-2 (рис. 2), при котором напор на гребне водослива  $h = d/2$ ;

$u_{r1}$  – текущий уровень воды в резервуаре относительно плоскости сравнения.

Представленная зависимость расхода через круговой водослив (вторая формула в (1)) является аппроксимацией значений, полученных Штраусом и Санденом [6], исходя из минимума среднеквадратичной погрешности при  $a \in [0,05..0,5]$ .

Если  $u_2 > \bar{u}_2$ , то составляется уравнение Бернулли для участка трубопровода между сечениями 2–2 и  $b'-b'$  (первая формула в (1), рис. 1 а, 2). Потерями напора между сечениями 0–0 и  $b'-b'$  можно пренебречь ввиду их малости. Живые сечения выбираются для линий свободной поверхности  $b-b$ , когда напор на гребне водослива  $h > d/2$ . В этом случае напор в сечениях  $b'-b'$   $u_{1b} = z'_0$ .

Если же линия свободной поверхности на водосливе занимает положение  $a-a$  ( $h \leq d/2$  (рис. 1а), то участок между сечениями 2–2—0–0 разбивается на два (рис. 2). Для участка между сечениями 2–2—1–1 составляется уравнение Бернулли. Участок 1–1—0–0 рассматривается как круговой водослив. Важно отметить, что напор на гребне водослива  $h = u_{1a} - z'_0$ , где  $u_{1a}$  – напор в сечении 1–1 (рис. 1 а).

Существует такое значение  $\bar{u}_2 = \min u_2$ , при котором  $u_1 = z'_0$ . Найти  $\bar{u}_2$  можно, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} u_2 - z'_0 = f_1(x), \\ x = 454,23d^{0,5}, \end{cases}$$

где  $f_1$  – зависимость потерь напора от расхода на участке между сечениями 2–2 и 1–1 (рис. 1а, 2). Можно принять  $f_1 \approx f$ .

Таким образом, расход воды, поступающей в резервуар, зависит от напора в смежном «узлу-оголовку» узле и, при определенных условиях, от напора в «узле-сечении» 1–1, где начинается поворот оголовка.

Для криволинейного замкнутого, без бокового сжатия нормального водослива (рис. 1б) расход воды, поступающей в резервуар, вычисляется по формуле:

$$b(u) = \begin{cases} m_0 \sigma_n k \pi d_1 \sqrt{2g(u-z_0)^{3/2}}, & u_{r2} < z_0 < u, \\ 0, & u < z_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $m_0$  – коэффициент расхода;

$$m_0 = 0,405 + 0,0027/(u-z_0), \quad [8];$$

$\sigma_n$  – коэффициент подтопления;

$$\sigma_n = 1, \text{ если } u_{r2} \geq z_0,$$

$$\text{и } \sigma_n = 1,05 \left[ 1 + 0,2 \left( \frac{u_{r2} - z_0}{z_0} \right) \right] \sqrt[3]{\frac{(u-u_{r2})}{(u-z_0)}},$$

$k$  – поправочный множитель к коэффициенту расхода для учета влияния наклона стенки;

$$k \approx 1,05;$$

$d_1$  – диаметр раструба на гребне водослива, м;

$u, z_0$  – пьезометрический напор в сечении 1–1 (в центре кольцевого водослива) и отметка гребня водослива соответственно, м;

$$g$$
 – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup> ( $\sigma_n \approx 1$ ).

Вероятно, можно принять  $u = z_0$ , так как режим истечения через оголовок достаточно неустойчив при значительных расходах (истечение в виде струи), а при малых расходах напор на гребне водослива незначителен (величина напора на водосливе – несколько сантиметров), и можно использовать уравнение Бернулли для участка между сечениями 2–2—1–1 (рис. 1б, 2), что и делается на практике. Это приводит к незначительному завышению расчетного расхода воды в резервуар.

Истечение воды через оголовок в форме воронки (рис. 1б) может происходить в виде:

1. кругового водослива с тонкой стенкой – граница свободной поверхности, кривая 1 (рис. 1б);

2. кругового водослива с тонкой стенкой – граница свободной поверхности, кривая 2 (рис. 1б);
3. незатопленной струи – сечение поверхности раздела струи, кривая 3 (рис. 1б);
4. полузатопленной струи – сечение поверхности раздела струи, кривая 4 (рис. 1б).

В первом и втором случаях расход через оголовок можно вычислять по формуле (2). В третьем и четвертом случаях истечение происходит неустойчиво, струя как бы колеблется (пульсирует), а пьезометрическая высота в сечении 1–1 непрерывно изменяется от 0 до 2 см от  $z_0$ . Поэтому не может существовать однозначной аналитической зависимости, связывающей напор в сечении 1–1 с расходом. В этом случае допустимо, с достаточной точностью, принять напор в сечении 0–0 равным  $z_0$  и использовать уравнение Бернулли для участка между сечениями 2–2—0–0 (рис. 1б и 2).

Найти границу адекватности между режимами 1, 2 и 3, 4 затруднительно (необходимы дополнительные экспериментальные исследования), поэтому во всех четырех случаях в сечении 0–0 пьезометрический напор можно принять равным  $z_0$ , что приведет к погрешности определения расхода (будет завышен на 2–3%).

Рассмотрим систему уравнений, описывающую задачу потокораспределения в системе подачи и распределения (СПРВ):

$$\left| \begin{array}{l} Ax = b(u), \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left| \begin{array}{l} A^T u = y - c, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left| \begin{array}{l} y = f(x). \end{array} \right. \quad (5)$$

Структура моделируемой гидравлической системы может быть описана ориентированным графом, под которым понимается пара множеств  $(V, E)$ , где  $V$  – конечное множество узлов;  $E$  – множество дуг, т. е., если  $v_1, v_2 \in V$ , то  $(v_1, v_2)$  – дуга (пара узлов, записанная в определенном порядке) [9]. Пусть  $m$  – число узлов,  $n$  – число дуг этого графа, тогда  $A$  – матрица инцидентности графа размера  $m \cdot n$  с элементами:  $a_{ij} = 1$ , если дуга  $j$  выходит из узла  $i$ ;  $a_{ij} = -1$ , если дуга  $j$  входит в узел  $i$ ;  $a_{ij} = 0$ , если дуга  $j$  не инцидентна узлу  $i$ . В каждом столбце такой матрицы только два ненулевых элемента: один равен 1, другой равен  $-1$ .

Координаты вектор-функции  $b(u)$  – заданные для узлов  $i = 1, \dots, m$  функции, описывающие зависимость узлового расхода от напора в каждом узле (для узлов на сети), либо, для резервуаров – от напоров, согласно формулы (1), причем  $\sum_{i=1}^m b_i = 0$ . Если  $b_i > 0$ , то величина  $b_i$  является узловым притоком в систему в узле  $i$ . Если  $b_i < 0$ , то величина  $|b_i|$  задает узловой расход из системы в узле  $i$  и для резервуаров определяется из соотношений (1), (2).

Фактически резервуар моделируется двумя висячими узлами. Один из узлов моделирует приток (поступление) воды в резервуар  $b_i$ , другой – отбор из резервуара  $b_i'$ , где заданным параметром будет уровень воды в резервуаре, а величина  $b_i$  – искомая зависимая переменная.

Компоненты вектора  $c$  соответствуют заданным приращениям напора на дугах  $j = 1, \dots, n$ , то есть, это напоры насосов при нулевых подачах.

Искомыми величинами являются координаты векторов:  $x, y \in R^n$ ,  $u, b(u) \in R^m$ . Величины  $x_j$  – расходы на дугах  $j = 1, \dots, n$ . Величины  $y_j$  – потери напора на дугах  $j = 1, \dots, n$ . Координаты вектора  $u$  – напоры в соответствующих узлах ( $u_i, i = 1, \dots, m$ ).

Уравнение (3) выражает баланс расходов в узлах.

Уравнение (4) определяет баланс между разностью напоров  $(A^T u)_j$  в концевых узлах дуги  $j$  и алгебраической суммой потери напора  $y_j$  и приращения напора  $c_j$  на каждой дуге  $j$  рассматриваемого графа. В случае, когда уровень воды в резервуаре выше оголовка подающего трубопровода, т.е. поступление воды в резервуар происходит под уровень, то величина напора является заданной величиной, и определяется текущим уровнем воды в резервуаре, а искомой независимой переменной является приток в резервуар, который определяется из уравнения Бернулли, в котором одно из сечений проходит через границу оголовка (вход воды в резервуар).

Условие (5) выражает зависимость между расходом  $x_j$  и потерей напора  $y_j$  по всем дугам  $j = 1, \dots, n$ .

После подстановки  $y$  из выражения (5) в уравнение (4), система (3)-(4) приобретает вид:

$$\left| \begin{array}{l} Ax = b(u), \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left| \begin{array}{l} A^T u = f(x) - c. \end{array} \right. \quad (7)$$

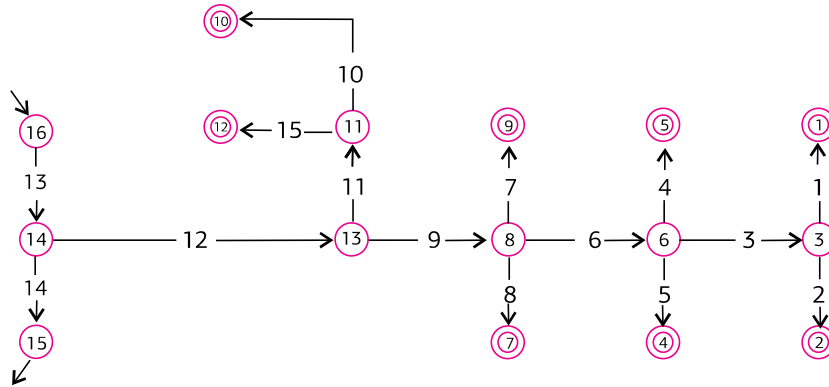


Рисунок 3  
Схема трубопроводов, по которым вода поступает в РЧВ.

**Пример.** Рассмотрим систему трубопроводов, по которой вода из водопроводной сети поступает к группе резервуаров (рис. 3). Трубы приняты стальные, а оголовки трубопроводов, по которым вода поступает в резервуары, в виде поворота (колена) (рис. 1а).

Исходные данные и результаты гидравлического расчета приведены в таблице 1. Отметка излива во всех резервуарах  $z_0=0,5$  м,  $u_{16}=5,3$  м,  $b_{15}=-300,0$  л/с. Для сравнения в таблице приведены результаты гидравлического расчета, когда на изливе в РЧВ принята отметка  $z_0=5,2$  м (вариант 2), т.е. отметка центра тяжести живого сечения 0–0, что обычно и принимается [3, 4, 10].

Из таблицы видно, что при незначительных напорах перед резервуарами (узел 16) поступление воды в них происходит в виде водослива. При этом расходы в резервуары существенно разнятся (более чем в 4 раза), вычисленные по предлагаемому и традиционному вариантам, и даже при незначительных напорах (разнице напоров перед резервуарами) величины расходов воды, поступающих в них, существенно отличаются. Перед проведением гидравлического расчета по первому варианту были найдены границы адекватности модели — напоры в узлах перед соответствующими резервуарами. Для узлов-резервуаров: 1, 2 –  $\bar{u}_3=5,212$  м; 4, 5 –  $\bar{u}_6=5,212$  м; 7, 9 –  $\bar{u}_8=5,212$  м; 10 –  $\bar{u}_{11}=5,212$  м; 12 –  $\bar{u}_{11}''=5,204$  м.

Исходные данные и результаты гидравлического расчета поступления воды в РЧВ

Таблица 1

дуг/ узлов	D, мм/L, м	$\chi$ , л/с Вар. 1/ Вар. 2	$u$ , м Вар. 1/ Вар. 2	$b$ , л/с Вар. 1/ Вар. 2
1	400 / 40,0	13,86 / 1,56	5,107 / 5,20	-13,86 / -1,56
2	400 / 40,0	13,86 / 1,56	5,107 / 5,20	-13,86 / -1,56
3	400 / 40,0	27,73 / 3,13	5,108 / 5,20	0 / 0
4	400 / 40,0	14,98 / 3,50	5,111 / 5,20	-14,98 / - 3,50
5	400 / 40,0	14,98 / 3,50	5,111 / 5,20	-14,98 / - 3,50
6	600 / 40,0	57,69 / 10,12	5,112 / 5,20	0 / 0
7	400 / 40,0	15,58 / 4,97	5,113 / 5,20	-15,58 / - 4,97
8	400 / 40,0	15,58 / 4,97	5,115 / 5,20	0 / 0
9	600 / 50,0	88,85 / 20,07	5,113 / 5,20	-15,58 / - 4,97
10	400 / 40,0	15,86 / 3,30	5,114 / 5,20	-15,86 / - 3,30
11	400 / 40,0	31,96 / 8,68	5,116 / 5,20	0 / 0
12	600 / 60,0	120,81 / 28,75	5,115 / 5,20	-16,11 / - 5,38
13	700 / 100,0	420,81 / 328,75	5,122 / 5,20	0 / 0
14	700 / 100,0	300,0 / 300,0	5,139 / 5,20	0 / 0
15	400 / 15,0	16,11 / 5,38	5,056 / 5,12	-300 / -300

Искомые переменные:  $x \in R^{14}$ ;  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 15$ ;  $b_i(u)$ ,  $i = 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12$ .

При заданных исходных данных и найденных границах адекватности будем решать систему нелинейных алгебраических уравнений (6)-(7).

В [11-14] приведен возможный способ решения системы уравнений (6)-(7).

Проанализируем результаты гидравлических расчетов, представленные в таблице.

1. По предложенным формулам (для оголовка в виде поворота) получается существенная разница в значениях расхода воды в резервуары. Расхождение по расходам для различных режимов по предложенной методике и традиционной может отличаться на порядок. Суммарный расход воды, поступающей в резервуары, по вариантам 1 и 2 может отличаться в разы.

2. При напоре в узле 16  $u_{16}=5,10$  м получается нефизичность результатов расчета (нет даже качественной адекватности) при использовании традиционного подхода (вариант 2). Когда напор на изливе равен отметке центра тяжести выходного сечения оголовка, то при расчете по традиционному варианту все резервуары становятся (согласно результатам расчета, которого нет в статье) источниками, т.е. вода через оголовок поступает из резервуара (при этом уровень воды в РЧВ ниже отметки излива). По первому же варианту в резервуары поступает вода, хотя расходы и незначительные.

## Выводы

1. Приведенная в статье математическая модель совместного функционирования резервуаров чистой воды и водопроводной сети позволяет

не только достаточно просто анализировать фактические режимы работы системы, но и обоснованно вырабатывать управляющие воздействия на систему, которые не выводят контролируемые параметры из допустимой области.

2. При моделировании функционирования резервуаров чистой воды необходимо учитывать не только текущий уровень воды и отметку излива, но и тип оголовка трубопровода, по которому вода поступает в резервуар и вид истечения из оголовка.

3. Расширены границы адекватности модели поступления воды в резервуары. При небольших напорах перед резервуарами предлагается использовать модель истечения через водослив (для оголовка в виде поворота), что позволяет повысить точность модели. Приводятся соотношения, позволяющие вычислить границы использования традиционной и предложенной моделей.

4. В приведенном примере показана существенная разница в расходах воды в резервуары при использовании различных моделей. Кроме того, значительно могут отличаться и расходы в каждом из резервуаров, расположенных на одной площадке, что может приводить к значительной разнице уровней воды в резервуарах.

5. Традиционно считалось, что узловые расходы (притоки) являются функцией только напора в соответствующем узле. Для резервуаров это не так, что учитывается в математической модели функционирования резервуара.

6. При оголовке в виде воронки допустимо применять напор при истечении, равный отметке гребня водослива.

## Литература:

1. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
2. М.Ю. Юдин, М.М. Хмяляйнен, С.В. Смирнова, Е.В. Русанова О правилах разработки электронных моделей систем водоснабжения и водоотведения//Водоснабжение и санитарная техника. 2019 № 3. С. 48-51.
3. Абрамов Н.Н. Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды. – М.: Стройиздат, 1972. – 288 с.
4. Плотников Н.А., Алексеев В.С. Проектирование и эксплуатация водозаборов подземных вод. – М.: Стройиздат, 1990. – 256 с.: ил.
5. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика): Учебник для вузов. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 545 с.
6. Справочник по гидравлике. Под редакцией Большакова В.А. Киев, издательское объединение «Вища школа», 1977, 280 с.
7. Курганов А.М., Федоров Н.Ф. Гидравлические расчеты систем водоснабжения и водоотведения: Справочник/ Под общ. ред. А.М. Курганова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Стройиздат. Ленингр. Отд-ние, 1986. – 440 с.: ил.
8. Справочник по гидравлическим расчетам. Под ред. П.Г. Киселева. Изд. 5-е М., «Энергия», 1974, 312 с.
9. Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. – Новосибирск: Наука, 1999.
10. Старинский В.П., Михайлик Л.Г. Водозаборные и очистные сооружения коммунальных водопроводов: Учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 269 с.: ил.
11. Елифанов С.П., Зоркальцев В.И. Задача потокораспределения с нефиксированными узловыми отборами //Водоснабжение и санитарная техника. 2012 № 9. С. 30-35.
12. Giustolisi O. New tools for more realistic network simulation and reliability assessments: Water Loss Workshop Event Summanary, 2008.
13. Баранчикова Н.И., Елифанов С.П., Зоркальцев В.И. Неканоническая задача потоко-распределения с заданными напорами и отборами в узлах // Вода и экология: проблемы и решения 2014 № 2. С. 31-38.
14. Afshar, M.H. «An Element by Element Newton Raphson's Algorithm for Pipe Network Analysis», International Journal of Water Resource Engineering, Vol. 4, No. 1, Spring 1996, pp. 1-14.