ОБ АЛГОРИТМЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ДИАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ТРУБОПРОВОДОВ

Корельштейн Л. Б., зам. директора ООО «НТП Трубопровод» по научной работе, Москва

На страницах журнала ТПА неоднократно рассказывалось о программе гидравлического и теплового расчета трубопроводов «Гидросистема», ее возможностях и применяемых в ней методах расчета. В данной статье рассказывается об одном интересном алгоритме выбора диаметров технологических трубопроводов, который успешно используется в программе «Гидросистема» уже 10 лет, но до сих пор (кроме отдельных кратких сообщений на научных встречах и конференциях) никогда не публиковался в общедоступной литературе.

Прежде всего сформулируем постановку задачи.

Рассматривается трубопровод с заданным распределением расходов по ветвям, который моделируется ориентированным графом G (с множеством узлов V и множеством ветвей E). Для каждой i-й ветви считается заданным положительный массовый расход продукта Q_i в направлении ветви. Давление p_j задано хотя бы в одном из узлов (если граф несвязный – хотя бы в одном из узлов каждой связной компоненты). Множество узлов с заданным давлением обозначим V_{fix}, множество узлов с неизвестным давлением – V_{var} ($V = V_{fix} \cup V_{var}$). V_{fix} должно включать все источники и потребители и может включать в себя также часть промежуточных узлов.

Диаметр всех ветвей не задан. Задача состоит в оптимальном выборе диаметров ветвей, так чтобы обеспечить минимальную стоимость (материалоемкость) трубопровода, при условии обеспечения нужной пропускной способности трубопровода.

Такая постановка задачи, конечно, является определенным упрощением и применима лишь к технологическим трубопроводам, для которых характерно отсутствие или небольшое число контуров в трубопроводных системах, что позволяется проектировщику осмысленно определить требования к минимальному расходу в каждой ветви. В общем случае, когда система включает множество колец (как это характерно, например, для наружных инженерных сетей), мы не можем знать желательное распределение расходов по ветвям, определены только требуемые расходы в потребителях. Далее, в общем случае в затраты надо включать не только капитальные затраты, но и стоимость перекачки (затраты энергии на работу насосов), то есть рассматривать задачу совместно с подбором насосов. Наконец, для очень сложных трубопроводных систем со многими кольцами нельзя проводить оптимизацию только по критерию стоимости, так как при этом часть ветвей может выродиться (получить очень маленькие или нулевые диаметры) и система станет очень уязвимой к отказам. Для таких систем следует использовать многокритериальную оптимизацию одновременно по стоимостным критериям и критериям надежности или минимальной избыточности. Одним из первых такой подход предложил упоминавшийся уже в предыдущих статьях профессор Тодини [1] (предложенный им ранее алгоритм глобального градиента для расчета потокораспределения успешно используется в «Гидросистеме»), и в настоящее время идея многокритериальной оптимизации при проектировании трубопроводов успешно развивается (в том числе с применением генетических алгоритмов).

Однако для типичных технологических трубопроводов изложенная выше постановка задачи вполне приемлема.

Определим вид целевой функции.

Функция стоимости трубопровода в зависимости от набора диаметров ветвей имеет вид:

$$C(D) = \sum_i c(D_i)\, L_i, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем ветвям, L_i – общая длина i-й ветви, $c(D_i)$ – стоимость 1 м трубы i-й ветви.

Будем считать, что стоимость одного метра трубы определяется стоимостью кубометра материала трубы (пропорциональна материалоемкости), т. е. $c(D_i) = c\pi D_i s_i$, где s_i – толщина труб на i-й ветви. Последняя обычно определяется из условий прочности по формуле $s_i = (p_i^{max} D_i)/(\varphi[\sigma] - p_i^{max})$, где p_i^{max} – максимальное давление на i-м участке, $[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала труб, φ – коэффициент прочности сварного шва. Поскольку p_i^{max} много меньше $[\sigma]$, а s_i все равно выбирается из дискретного ряда толщин, $s_i \approx (p_i^{max} D_i)/\varphi[\sigma]$ и $c(D_i) \approx c\pi/\varphi[\sigma]\, D_i^2\, p_i^{max}$.

Как правило, при выборе толщины стенки на всех ветвях используется максимально возможное давление во всей системе p^{max} (учитывая и случай остановки перекачки). Исключение составляют случаи, когда система разделена (определенным элементом – предохранительным клапаном, компрессором и т. д.) на трубопроводы более высокого и более низкого давления; однако их гидравлический расчет обычно проводится отдельно. С учетом этого:

$$C(D) = \sum_i c(D_i)\, L_i \approx \sum_i c\pi/\varphi[\sigma]\, p^{max}\, D_i^2\, L_i,$$

и задачу, таким образом, можно свести к минимизации функции простого вида:

$$C(D) = \sum_i D_i^2\, L_i \tag{2}$$

при обеспечении заданных расходов и заданных давлений.

Рассмотрим теперь зависимости между расходом, диаметром и падением давления на отдельной ветви. Падение давления на i-й ветви складывается из постоянной и переменной частей:

$$\Delta P_i = \Delta P_i^{var}(D_i) + \Delta P_i^{fix} \tag{3}$$

Постоянная часть потерь давления ΔP_i^{fix} учитывает гидростатический перепад давлений (за счет перепада высот), а также перепад давлений на насосах (для активных ветвей) для заданного расхода, и фактически задана. Переменная часть потерь определяется по уравнению:

$$\Delta P_i^{var}(D_i) = \left(\lambda_i \frac{L_i}{D_i} + \zeta_i^{\Sigma}\right)\frac{\rho v_i^2}{2} = \left(\lambda_i \frac{L_i}{D_i} + \zeta_i^{\Sigma}\right)\frac{8}{\pi^2 \rho}\frac{Q_i^2}{D_i^4}, \tag{4}$$

где λi – коэффициент гидравлического трения ветви, ζ_i^{Σ} – суммарный коэффициент местных сопротивлений ветви, v_i и ρ – скорость и плотность продукта.

Используем теперь следующий подход, восходящий еще к основателю теории гидравлических цепей А. П. Меренкову и позволяющий перейти от оптимизации по диаметрам к оптимизации по узловым давлениям [2]. Забудем на время о том, что пространство значений внутренних диаметров труб дискретно, и будем искать решение на непрерывном множестве значений диаметров $(0,+\infty)$. После того как оптимальные (или по крайней мере достаточно хорошие по стоимости) значения диаметров будут найдены, можно будет просто взять ближайшие к ним значения из стандартного ряда диаметров труб.

Для любого $\Delta P_i^{var}(D_i) > 0$ из (4) всегда можно найти такое значение D_i, что расход по ветви будет точно равен заданному расходу Q_i. Для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что на ветвях режим турбулентного квадратичного течения и доминируют потери на трение (в других случаях изложенный далее подход тоже работает, просто математические выкладки будут более сложными). В этом случае коэффициент гидравлического трения можно считать приближенно одинаковым для всего трубопровода и практически независимым от диаметра, и уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\Delta P_i^{var}(D_i) = \frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\,\frac{Q_i^2 L_i}{D_i^5}, \tag{5}$$

Или:

$$D_i = \left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{0.2}\left(\frac{Q_i^2 L_i}{\Delta P_i^{var}}\right)^{0.2}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2) и учитывая $\Delta P_i^{var} = \Delta P_i - \Delta P_i^{fix}$, получаем:

$$C(D) = \left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{0.4}\sum_i \frac{Q_i^{0.8} L_i^{1.4}}{(\Delta P_i - \Delta P_i^{fix})^{0.4}}. \tag{7}$$

Таким образом, задача свелась к поиску минимума выпуклой функции (7) на множестве значений узловых давлений V_{var}, удовлетворяющих неравенствам $\Delta P_i^{var} = \Delta P_i - \Delta P_i^{fix} > 0$, или:

$$\Delta P_i > \Delta P_i^{fix}. \tag{8}$$

Система линейных неравенств (8) задает ограниченное выпуклое открытое множество, причем при приближении к ее границам целевая функция (7) бесконечно возрастает. Поэтому, если это множество не пусто (то есть система неравенств (8) совместима), целевая функция (7) всегда имеет единственный минимум. Как же определить, что система неравенств (8) вообще совместима (то есть требуемое распределение потоков в трубопроводе вообще реализуемо при заданных узловых давлениях, перепадах высот и напорах насосов)?

Далее будем считать, что G – граф без рециклов. Пусть Pa – простой путь в графе G, в концевых узлах которого задано давление, а промежуточных – нет (например, это может быть путь от источника к потребителю). Будем называть подобные пути ΔP-путями. Суммируя неравенства (8) по всем ветвям пути Pa, получим:

$$\Delta P(Pa) > \textstyle\sum_{v\in Pa} \Delta P_v^{fix} \tag{9}$$

То есть естественное условие, что падение давления на пути Pa (разность заданных давлений в начальном и конечном узлах) должно превышать сумму постоянных потерь давления ветвям. Очевидно, что соблюдение условия (9) для всех ΔP-путей в графе G является необходимым (и притом легко проверяемым) условием совместимости системы неравенств (8). Можно доказать (используя теорему двойственности Гейла [3]), что эти условия в данном случае являются и достаточными.

Для решения задач выпуклой оптимизации предложено много эффективных методов [4]. Однако для данной конкретной задачи можно предложить специальный алгоритм, использующий некоторые ее особенности.

Прежде все заметим, что целевая функция (7) на большей части области, задаваемой условиями (8), обычно слабо отклоняется от минимума и только при приближении к границам области начинает резко расти. Пример подобного поведения целевой функции для простейшего случая одного узла с незаданным давлением проиллюстрирован на рисунке 1 (в безразмерных координатах). Поэтому основной проблемой является нахождение хорошего начального приближения, удовлетворяющего условиям (8) и лежащего достаточно далеко от границ допустимой области давлений. Такое начальное приближение можно затем улучшать стандартными методами выпуклой оптимизации или даже сразу использовать для определения диаметров по формулам (6), учитывая малый показатель степени 0,2 при перепаде давлений в формуле (6) и то, что диаметры в конечном итоге все равно будут подбираться из стандартного ряда.

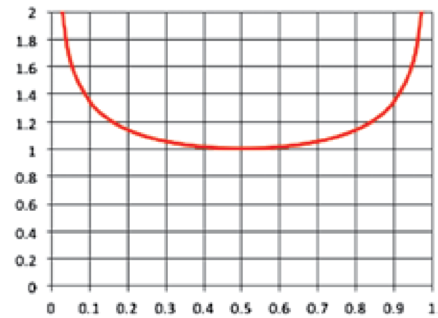

Рисунок 1

Другой особенностью данной задачи является то, что для ΔP-путей она легко решается в явном виде. Действительно, пусть весь трубопровод представляет из себя ΔP-путь Pa и для него выполняется условие (9). В точке минимума целевой функции (7) все ее частные производные по узловым давлениям внутренних узлов пути должны быть равны нулю. Рассмотрим такой внутренний узел, и пусть v' и v'' – соответственно ребра, входящие в него и выходящие из него. Тогда условие равенства производной целевой функции (7) по давлению в этом узле нулю примет вид:

$$\frac{C(v')}{\Delta P_{v'}^{var}} = \left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{0.4}\frac{Q_{v'}^{0.8}L_{v'}^{1.4}}{(\Delta P_{v'}^{var})^{1.4}} = \left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{0.4}\frac{Q_{v''}^{0.8}L_{v''}^{1.4}}{(\Delta P_{v''}^{var})^{1.4}} = \frac{C(v'')}{\Delta P_{v''}^{var}}. \tag{10}$$

Поскольку условие (10) должно выполняться для всех внутренних узлов пути Pa, получаем, что для точки минимума стоимости величина $C_\Delta(v) = C(v)/(\Delta P_v^{var})$, имеющая смысл «удельной» стоимости (на единицу потерь давления от гидравлического трения), одинакова для всех ветвей пути. Тогда:

$$\Delta P_v^{var} = C_\Delta^{-\frac{5}{7}}\left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{\frac{2}{7}} Q_v^{\frac{4}{7}} L_v, \tag{11}$$

и, складывая по всем ветвям пути, получим

$$\Delta P(Pa) - \textstyle\sum_{v\in Pa}\Delta P_v^{fix} = C_\Delta^{-\frac{5}{7}}\left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{\frac{2}{7}}\sum_{v\in Pa} Q_v^{\frac{4}{7}} L_v,$$

откуда:

$$C_\Delta = \left(\frac{8\lambda}{\pi^2\rho}\right)^{0.4}\left[\frac{\sum_{v\in Pa} Q_v^{\frac{4}{7}} L_v}{\Delta P(Pa) - \sum_{v\in Pa}\Delta P_v^{fix}}\right]^{1.4} \tag{12}$$

Из (12) и (11) получаем также:

$$\Delta P_v^{var} = \frac{Q_v^{\frac{4}{7}} L_v}{\sum_{v\in Pa} Q_v^{\frac{4}{7}} L_v}\left[\Delta P(Pa) - \textstyle\sum_{v\in Pa}\Delta P_v^{fix}\right]. \tag{13}$$

Таким образом, величина C_Δ рассчитывается по формуле (12), после чего с использованием формул (11) или (13) определяются потери давления на ветвях (удовлетворяющие условию (8)!) и по ним – сами узловые давления, а по формуле (6) – диаметры.

Отсюда возникает идея, как можно найти хорошее начальное приближение в общем случае. Надо выбрать в графе G некоторый ΔP-путь и выполнить по нему частичную оптимизацию – то есть выделить в (7) слагаемые, соответствующие только ему, и минимизировать только их сумму. С использованием формул (11), (12), (13) определим давления в узлах этого пути. Получится тот же граф G, но множество узлов с заданным давлением V_{fix} увеличится, а множество узлов V_{var}, давления в которых еще неизвестны, уменьшится. Если при этом еще останутся узлы с неизвестным давлением, выберем в получившемся графе новый ΔP-путь – и так до тех пор, пока не определятся все узловые давления. Пример такой последовательности выбора путей показан на рисунке 2.

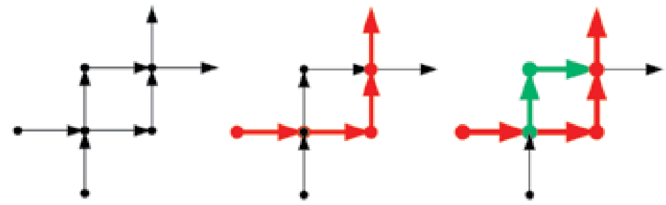

Рисунок 2

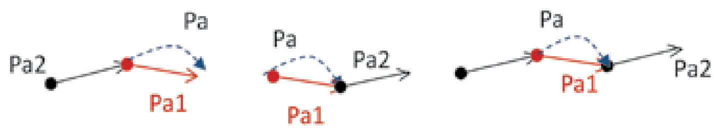

Рисунок 3

Казалось бы, разумно ожидать, что подобная процедура приведет к пусть не оптимальному, но хорошему начальному приближению… Не тут-то было! Дело в том, что если на каждой итерации выбирать ΔP-путь для оптимизации произвольно, то возможна ситуация, когда после некоторой итерации возникают ΔP-пути, для которых условие (9) не выполняется, и, следовательно, система неравенств (8) вообще несовместна!

Возникает вопрос: а нет ли такого критерия выбора конкретного ΔP-пути для оптимизации на каждой итерации, который ***гарантировал*** бы, что описанный алгоритм всегда дойдет до конца? Оказывается, такой критерий есть! **Надо на каждой итерации выбирать для частичной оптимизации тот из нетривиальных (из двух и более ветвей) ΔP-путей, для которого величина «удельной» стоимости C_Δ максимальна!** Именно такой критерий выбора пути и является самой нетривиальной частью данного алгоритма.

Докажем, что при таком выборе алгоритм действительно всегда дойдет до конца. Предположим, что до начала итераций условие (9) выполнено для всех ΔP-путей. Тогда достаточно доказать, что если оно выполнено для всех ΔP-путей до очередной итерации, то оно будет выполнено и после нее. Пусть Pa_1 – некоторый ΔP-путь после очередной итерации. Если он был ΔP-путем и до нее, то условие (9) для него было выполнено и продолжает выполняться. Если же он стал ΔP-путем после очередной итерации, то это означает, что либо его начальный узел, либо конечный узел, либо оба этих узла были внутренними узлами пути Pa, выбранного для оптимизации на очередной итерации. Пусть P_{start} и P_{end} – давления в этих узлах после очередной итерации. Поскольку граф G не содержит рециклов, всегда можно составить путь Pa_2, состоящий из пути Pa_1, и части пути Pa (рисунок 3), который был нетривиальным ΔP-путем до начала очередной итерации и для которого, следовательно, выполнялось условие (9). Если бы процедура оптимизации была применена к пути Pa_2 вместо Pa, то начальному и конечному узлу пути Pa_1 были бы присвоены некоторые давления P'_{start} и P'_{end} и при этом потери на ветвях Pa_2 удовлетворяли бы условию (8), откуда $P'_{start} - P'_{end} > \sum_{v\in Pa_1} \Delta P_v^{fix}$. С другой стороны, в силу критерия выбора пути на очередной итерации $C_\Delta(Pa) \geq C_\Delta(Pa_2)$. Тогда из (11) следует, что на общих ветвях путей Pa и Pa_2 потери давления при оптимизации для пути Pa были бы не больше, чем при оптимизации по пути Pa_2. Следовательно, $P_{start} \geq P'_{start}$ и $P_{end} \leq P'_{end}$, откуда $P_{start} - P_{end} \geq P'_{start} - P'_{end} > \sum_{v\in Pa_1} \Delta P_v^{fix}$, что и требовалось доказать.

Заметим в заключение, что изложенный выше алгоритм успешно обобщается и на более сложные случаи сетей с рециклами, с частично заданными диаметрами ветвей, с течением многофазных смесей, и другие случаи. Все идеи алгоритма сохраняются, только математика становится несколько более изощренной.

Литература:

1. *Todini E. Looped water distribution networks design using a resilience index based heuristic approach // Urban Water. – 2000. – N 2. – P.115–122.*
2. *Меренков А. П. Применение электронных вычислительных машин для оптимизации разветвленных тепловых сетей. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1963. – № 4. – С. 531–538. Также в книге: Анатолий Петрович Меренков. Научное наследие. Воспоминая близких. Документы. – Иркутск: ИСЭМ ИСО РАН, 2006. – С.125–135.*
3. *Зоркальцев В. И., Киселева М. А. Системы линейных неравенств. Учебное пособие. – Иркутск, ИГУ, 2007. – 99 с.*
4. *Нестеров Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации. – М.: Издательство МЦНМО, 2010. – 281 с.*

Москва, июнь 2018 года